

Aplicação da Transformada Wavelet Complexa Dual-Tree na Detecção de Sincronização de Fase entre Sistemas Caóticos de Lorenz

Maria Teodora Ferreira

Programa de Pós-Graduação em Computação Aplicada - CAP - INPE
12227-010, São José dos Campos, SP
E-mail: mteodoraf25@gmail.com,

Rosângela Follmann

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP
E-mail: rosangelafoollmann@gmail.com,

Margarete O. Domingues, Elbert E. N. Macau,

Laboratório Associado de Computação - LAC - INPE,
12227-010, São José dos Campos, SP
E-mail: margarete@lac.inpe.br, elbert@lac.inpe.br.

Resumo: *Sincronização de fase em sistemas caóticos não idênticos acoplados ocorre devido a presença de um acoplamento fraco entre os sistemas e resulta em um travamento na fase enquanto suas amplitudes permanecem caóticas e não correlacionadas. Para identificar este fenômeno dado um sinal é necessário medir corretamente a sua fase. No entanto, se o sinal tem um espectro de banda larga, que é típico de sinais caóticos, a medição da fase pode ser um desafio. Neste trabalho, aplica-se uma nova metodologia para calcular a fase de dois sistemas caóticos de Lorenz acoplados. Este método baseia-se na Transformada Wavelet Complexa Dual-Tree, que é uma forma de transformada wavelet discreta que gera coeficientes complexos usando uma dupla árvore de filtros para obter as suas partes real e imaginária. A abordagem proposta é robusta e computacionalmente eficiente. Além disso, mostra a flexibilidade e é, em princípio, aplicável a qualquer série experimental, o que a metodologia tradicional não permite.*

Palavras-chave: *Fase, Sincronização de Fase, Análise de Séries Temporais*

1 Introdução

A sincronização é o processo em que dois ou mais sistemas interagem entre si e alteram seus ritmos de modo a adquirirem uma dinâmica comum.

Nas últimas décadas, progressos consideráveis tem sido feitos no sentido de generalizar o conceito de sincronização permitindo incluir o caso de sistemas dinâmicos caóticos [1, 10, 12]. Neste trabalho nosso interesse é a sincronização de fase, a qual ocorre em sistemas fracamente acoplados e resulta em um travamento na fase, enquanto suas amplitudes permanecem não correlacionadas.

Para estudar a sincronização de fase entre sistemas caóticos é necessário uma definição clara e não ambígua de fase para que se possa testar a condição $\Delta\phi(t) = |\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \text{const} < 2\pi$, em que $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ são as fases dos sistemas 1 e 2.

Devido a necessidade de se obter a fase dos sistemas, vários métodos foram propostos sendo que a maioria deles tem como entrada a projeção do atrator sobre uma superfície de seção adequada: transformada de Hilbert, superfície de seção de Poincaré [13], curvatura e plots de recorrência [8, 13], conjuntos localizados [11], um método com base na análise dos mínimos

quadrados [3], transformada de Fourier de tempo curto e a transformada wavelet complexa contínua [4, 5, 6, 7]. No entanto, nenhum destes métodos funciona adequadamente para todas as situações. Em particular, as metodologias que utilizam transformada wavelet complexa contínua baseiam-se na wavelet complexa de Morlet para obter a fase de uma série caótica, rendendo bons resultados para os sistemas coerentes [5, 7]. No entanto, esta abordagem implica um alto custo computacional e os resultados podem não ser facilmente aplicáveis, devido à sua redundância quando aplicado a séries temporais com grandes número de pontos, como as de interesse.

A Transformada Wavelet (TW) é uma transformada linear que pode ser utilizada na análise de sinais não estacionários para extrair informações das variações em frequência desses sinais ao longo do tempo e para detectar suas estruturas temporalmente e/ou espacialmente localizadas [9]. Em teoria, existem duas formas de TW, uma forma contínua e outra discreta. Quando os parâmetros de escala a e translação b são contínuos, tem-se a chamada Transformada Wavelet Contínua (CWT), a qual transforma um sinal unidimensional (tempo) em uma representação bi-dimensional (tempo, escala) que pode ser altamente redundante. A fim de se obter uma descrição mais eficiente para a TW, a Transformada Wavelet Discreta (DWT) foi introduzida, na qual os valores dos parâmetros a e b são discretizados. A sigla CWT é utilizada em dois contextos diferentes na teoria wavelet. Um deles é a Transformada Wavelet Contínua a qual já foi utilizada em trabalhos anteriores para calcular a fase de sistemas caóticos e para avaliar sincronização de fase entre sistemas de Rössler acoplados [4, 5, 6, 7]. A outra é a Transformada Wavelet Complexa *Dual-Tree*, a qual é um reforço relativamente recente para a DWT, com importantes propriedades adicionais como quase invariância a deslocamentos e seletividade direcional em duas e mais dimensões, além de algoritmos rápidos [14].

2 Metodologia

Neste trabalho, considera-se a aplicabilidade de nosso método descrito em [2] às séries temporais geradas pelos sistemas de Lorenz acoplados.

Sistema de Lorenz

Sejam dois sistemas não idênticos de Lorenz em evolução caótica, acoplados bidirecionalmente por meio de suas variáveis x , conforme descrito na equação 1. Para simular esses sistemas, usou-se o método Runge-Kutta de quarta ordem com passo de integração igual a 0.001. A série temporal apresenta 2^{23} número de pontos.

O sistema de Lorenz estudado é dado por meio das seguintes equações

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= 10 (y_{1,2} - x_{1,2}) + \eta (x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= 28 x_{1,2} - y_{1,2} - z_{1,2} x_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= \omega_{1,2} (x_{1,2} y_{1,2} - \frac{8}{3} z_{1,2})\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\omega_1 = 0,9831$ e $\omega_2 = 1,018$ introduzem uma pequena diferença entre os dois sistemas, tornando-os não idênticos, e η é a intensidade de acoplamento.

Neste trabalho, foram considerados três forças de acoplamento. Um acoplamento fraco entre os dois sistemas, ou seja, $\eta = 0.4$; um acoplamento médio de $\eta = 4.2$ e um acoplamento forte de $\eta = 6$.

Método Tradicional do Cálculo da Fase

Um método usual para o cálculo da fase considera a simetria nas equações de Lorenz e o atrator é projetado sobre um novo plano (u, z) , com $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. A fase é então definida pelo ângulo $\phi = \arctan\left(\frac{z(t)-z_0}{u(t)-u_0}\right)$, em que $u_0 = 12$ e $z_0 = 27$ são introduzidos de forma a transladar os eixos de referência para o centro do atrator [12]. Note que, neste método, são necessários os valores de x e y .

Transformada Wavelet Complexa Dual-Tree (DT-CWT)

Matematicamente, qualquer sinal de energia finita $x(t)$ pode ser decomposto em termos de funções base. Neste estudo em multiescala as funções base são as funções escala $\phi_{j,n}(t)$ e funções wavelets $\psi_{j,n}(t)$ via a seguinte expansão

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c(j, n) \phi_{j,n}(t) + \sum_{j, n \in \mathbb{Z}} d(j, n) \psi_{j,n}(t), \quad (2)$$

em que $c(j, n)$ são os coeficientes de escala $c(j, n) = \langle x, \phi_{j,n} \rangle$, e $d(j, n)$ são os coeficientes wavelet $d(j, n) = \langle x, \psi_{j,n} \rangle$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica o produto interno. Existem formas práticas de se calcular os coeficientes $c(j, n)$ e $d(j, n)$. A forma mais utilizada, a qual otimiza a eficiência no cálculo utilizando-se de banco de filtros organizados num esquema piramidal e que leva também a uma representação em multiresolução do sinal foi proposta por Mallat [9].

Tradicionalmente, a DWT apresenta quatro deficiências fundamentais, as quais são: oscilações, variância a deslocamentos, *aliasing* e falta de direcionalidade [14]. Em [14] foi proposto uma possível solução para sanar essas deficiências da DWT com o uso de funções wavelets complexas $\psi_c(t) = \psi_h(t) + \imath \psi_g(t)$, em que $\psi_h(t)$ denota a parte real e $\psi_g(t)$ a parte imaginária. A DT-CWT utiliza-se de duas DWT's reais, a primeira DWT (banco de filtro superior ou árvore superior) é composta por filtros passa-baixa $h_0(n)$ e passa-alta $h_1(n)$, enquanto que a segunda DWT (banco de filtro inferior ou árvore inferior) é composta de filtros passa-baixa $g_0(n)$ e passa-alta $g_1(n)$. Cada DWT é composta por dois diferentes conjuntos de filtros, com cada um satisfazendo as condições de reconstrução perfeita (PR) e construídos conjuntamente de modo que a transformada global seja aproximadamente analítica. Considerando um sinal real $x(n)$, obtem-se como saída da primeira DWT a parte real $\psi_h(t)$ e $d_h(j, n)$ da wavelet complexa e do coeficiente wavelet complexo, respectivamente. Na segunda DWT tem-se como saída a parte imaginária $\psi_g(t)$ e $d_g(j, n)$ da wavelet complexa e do coeficiente wavelet complexo, respectivamente. Assim, tem-se a wavelet complexa $\psi_c(t)$ e o coeficiente wavelet complexo $d_c(j, n)$ dado por

$$\psi_c(t) = \psi_h(t) + \imath \psi_g(t) \quad (3)$$

$$d_c(j, n) = d_h(j, n) + \imath d_g(j, n). \quad (4)$$

A Figura 1 mostra uma representação esquemática da decomposição do sinal real $x(n)$ em três escalas ($j = 1, 2, 3$) utilizando-se a DT-CWT. Na representação a notação $\downarrow 2$ representa a decimação do sinal por dois, isto é, a remoção de um ponto a cada dois.

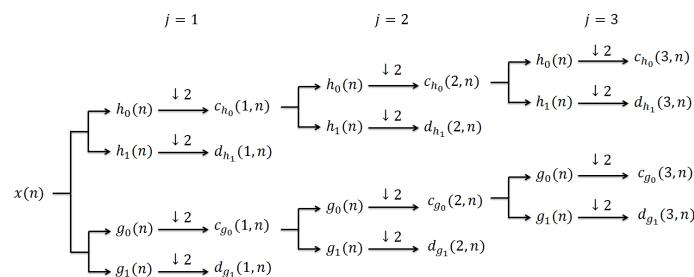


Figura 1: Representação esquemática da decomposição do sinal real $x(n)$ em três escalas ($j = 1, 2, 3$), utilizando-se da DT-CWT.

A fim de satisfazer as condições de reconstrução perfeita do sinal, os filtros são construídos de modo que a wavelet complexa $\psi_c(t)$ seja aproximadamente analítica, ou seja, de modo que $\psi_g(t)$ é aproximadamente um par de transformada de Hilbert de $\psi_h(t)$, denotada como $\psi_g(t) \approx H\{\psi_h(t)\}$ [14]. Neste trabalho, na primeira escala de decomposição foi utilizado (13,19) *tap-filtros* que são bi-ortogonais e quase simétricos. Para escalas $j > 1$, foram utilizados os filtros *q-shift* com (14,14) *tap-filtros* [14]. Note que o primeiro nível de decomposição utiliza uma

família wavelets diferente da usada nos demais níveis, a fim de obter que a DT-CWT seja aproximadamente analítica para cada nível [14].

Método Proposto do Cálculo da Fase

A fim de calcular a fase de um sistema caótico usando a abordagem da DT-CWT, a série para a variável x do sistema 1, isto é, $x_1(n)$, é decomposta pela transformada DT-CWT. A partir desta análise obtém-se os coeficientes wavelet complexos $d_c(j, n)$ em cada escala j . Depois de obter estes coeficientes, a energia $E(j, n)$ é calculada como o quadrado do módulo dos coeficientes wavelet complexos, isto é, $E(j, n) = |d_c(j, n)|^2$. A energia máxima $\max_j E(j, n) = E(J, n)$ é, então, encontrada a fim de localizar a escala J na qual o sinal decomposto tem sua energia máxima. A escala J associada a máxima energia é usada para calcular a fase $\phi(J, n) = \arctan\left(\frac{d_g(J, n)}{d_h(J, n)}\right)$ associada a um tempo específico, no caso geral $J = J(t)$ (veja Figura 2(a)). Subsequentemente, o mesmo procedimento é aplicado para a série da variável x do sistema 2, isto é, $x_2(n)$. Então calcula-se a fase de cada sistema, $\phi_1(J, n)$ e $\phi_2(J, n)$. Em seguida, a diferença de fase entre os sistemas é calculada como $\Delta\phi(J, n) = \phi_1(J, n) - \phi_2(J, n)$ a qual permite avaliar se a condição de sincronização de fase é satisfeita ou não (veja Figura 2(b)).

A Figura 2(a) mostra um esquema do método proposto para calcular a fase de um sistema caótico usando a abordagem da DT-CWT. A Figura 2(b) mostra um esquema da aplicação do método em duas séries $x_1(n)$ e $x_2(n)$, a qual são as séries na variável x do sistema 1 e 2, respectivamente.

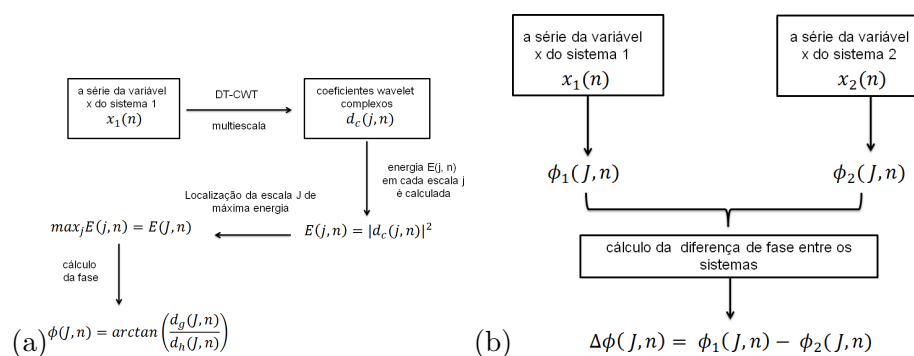


Figura 2: Esquema do método proposto em (a) para calcular a fase usando a variável x de um sistema caótico e (b) da aplicação do método nas séries x_1 e x_2 .

3 Resultados

Neste estudo, a série da variável x de cada sistema de Lorenz com 2^{23} pontos foi utilizada para o cálculo da fase. Como tem-se 2^{23} pontos na série temporal, fez-se a decomposição do mesmo em 23 escalas.

A Figura 3 mostra a energia máxima associada a cada escala de decomposição considerando as três diferentes intensidades de acoplamento. Devido a quantidade de número de pontos convencionou-se utilizar a escala $J = 14$ para as três intensidades de acoplamento a fim de calcular a fase. A Tabela 1 mostra a escala J que apresenta a máxima energia associada a cada sistema para cada intensidade de acoplamento. Analisando os valores de energia máxima e avaliando a resolução da série temporal obtida para a fase (2^{23-J} pontos), decidiu-se adotar o valor de $J = 14$ para os três casos.

A Figura 4 mostra a diferença de fase entre os sistemas de Lorenz considerando em (a) o método tradicional do cálculo da fase, (b) o método wavelet proposto e em (c) intensidade de acoplamento $\eta = 4.2$ considerando ambos os métodos. Nota-se que o método wavelet é capaz de identificar corretamente quando os sistemas não estão sincronizados em fase ($\eta = 0.4$), quando

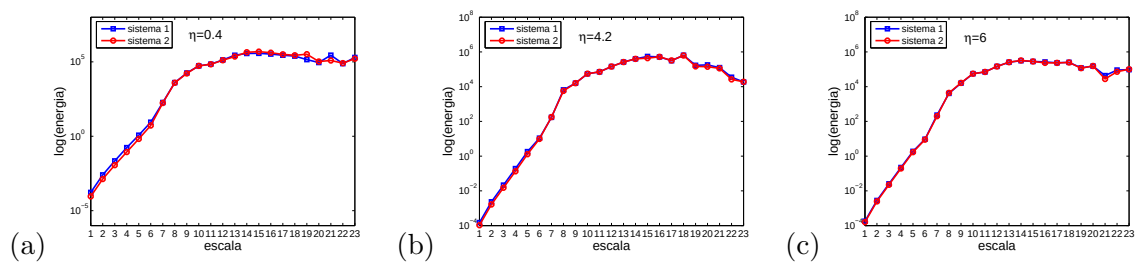


Figura 3: Energia máxima associada a cada escala de decomposição utilizando-se o método proposto para o cálculo da fase. No eixo x tem-se as escalas de decomposição e no eixo y a máxima energia associada encontrada na referida escala.

η	no sistema 1	no sistema 2	número de pontos
$\eta = 0.4$	J=15	J=15	2^8
$\eta = 4.2$	J=18	J=18	2^5
$\eta = 6$	J=14	J=14	2^9

Tabela 1: Tabela constando a escala J que apresenta a máxima energia associada a cada sistema e para cada intensidade de acoplamento.

os sistemas apresentam regiões de sincronização de fase ($\eta = 4.2$) e quando os sistemas estão sincronizados em fase ($\eta = 6$).

4 Considerações Finais

Em relação ao enfoque convencional, que se utiliza de variáveis de estado ortogonais obtidas a partir da projeção do atrator sobre um plano de referência, o método wavelet se mostra coerente com este método convencional detectando em valores idênticos de fase quando os sistemas estão não sincronizados em fase ($\eta = 0.4$), quando apresentam regiões de sincronização de fase ($\eta = 4.2$) e quando estão sincronizados em fase ($\eta = 6$).

As principais vantagens no método wavelet proposto para o cálculo da fase é não ser necessário projetar o atrator sobre um novo plano (u, z) , apenas considera-se uma variável de estado, por exemplo, a variável x , e a partir dela calcula-se a fase, pode-se utilizar séries longas, a simplicidade da metodologia e cálculo.

Referências

- [1] S. Boccaletti and J. Kurths and G. Osipov and D.L. Valladares and C.S. Zhou, The synchronization of chaotic systems. *Physics Report*, 366, (2002), 1-101.
- [2] M. T. Ferreira and R. Follmann and M. O. Domingues and E. E. N. Macau, “Transformada Wavelet Complexa Dual-Tree e a detecção da sincronização de fase entre sistemas com dinâmica caótica” (10ª Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON) pp. 723-726, 2011.
- [3] R. Follmann and E. E. N. Macau and E. Rosa, Phase detection of chaos. *Physical Review E*, **83**, (2011), 016209.
- [4] A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, An approach to chaotic synchronization. *Chaos*, **14**, (2004), 603-610.
- [5] A. E. Hramov and A. A. Koronovskii and Y. Levin, Synchronization of chaotic oscillator time scales. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **100**, (2005), 784-794.

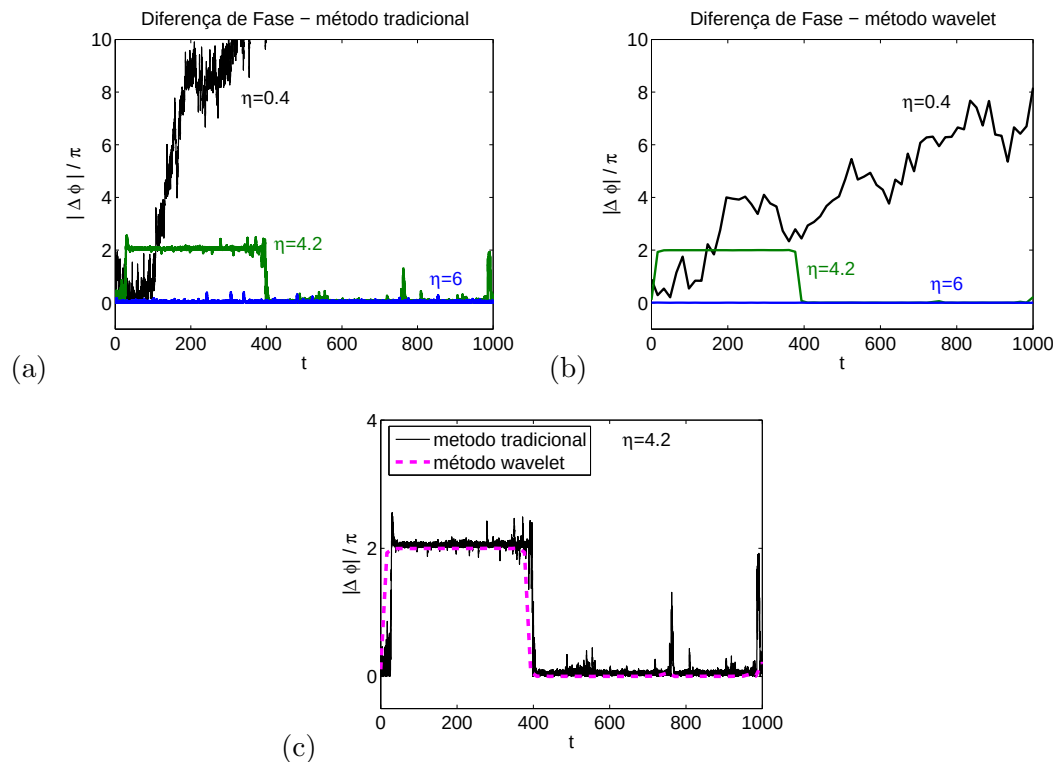


Figura 4: Diferença de fase entre os dois sistemas de Lorenz considerando a variável x em (a) o método tradicional do cálculo da fase, (b) o método wavelet proposto e em (c) intensidade de acoplamento $\eta = 4.2$ considerando ambos os métodos.

- [6] A. A. Koronovskii and A. Hramov, Chaotic phase synchronization studied by means of continuous wavelet transform. *Technical Physics Letters*, **30**, (2004), 587-590.
- [7] A. A. Koronovskii and M. Kurovskaya and A. Hramov, Relationship between phase synchronization of chaotic oscillators and time scale synchronization. *Technical Physics Letters*, **31**, (2005), 847-850.
- [8] J. Kurths and M. Romano and M. Thiel and G. Osipov and M. Ivanchenko and I. Kiss and J. Hudson, Synchronization Analysis of Coupled Noncoherent Oscillators. *Nonlinear Dynamics*, **44**, (2006), 135-149.
- [9] S. G. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **11**, (1989), 674-693.
- [10] L. M. Pecora and T. L. Carrol, Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, **64**, (1990), 821-824.
- [11] T. Pereira and M. S. Baptista and J. Kurths, General framework for phase synchronization through localized sets. *Physical Review E*, **75**, (2007), 026216.
- [12] A. S. Pikovsky and M. G. Rosenblum and J. Kurths, "Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences", Cambridge University Press, 2003.
- [13] M. C. Romano and M. Thiel and J. Kurths and I. Z. Kiss and J. L. Hudson, Detection of synchronization for non-phase-coherent and non-stationary data. *Europhysics Letters*, **71**, (2005), 466-472.
- [14] I. W. Selesnick and R. G. Baraniuk and N. G. Kingsbury, The Dual-Tree Complex Wavelet Transform. *IEEE Signal Processing Magazine*, **22**, (2005), 123-151.