O problema da determinação da atitude através da observação de dois vetores – uma descrição do algoritmo TRIAD e sua matriz de covariância

The attitude determination problem from two reference vectors- a description of the triad algorithm and its attitude covariance matrix

Francisco Granziera Jr[1]; Roberto V. F. Lopes[2]; Marcelo C. Tosin[3]

Resumo

Neste artigo é apresentada a descrição do algoritmo TRIAD para a determinação da atitude tridimensional de um corpo, por meio da observação de dois vetores. Esse algoritmo, apesar de não constituir a solução ótima para o problema, pode ser implementado eficientemente em computadores. Também é apresentada a matriz cartesiana de covariância da atitude para o algoritmo. Os pormenores do cálculo desta matriz são esmiuçados, resultando em uma equação analítica simples em função dos conjuntos de medidas tomados de tríades de dois diferentes sensores no sistema de coordenadas do corpo. As soluções apresentadas podem ser utilizadas para implementar sistemas de determinação da atitude altamente integrados, usando sensores inerciais e sensores de referência com tecnologia de micro-fabricação (Micro-Electro-Mechanical Systems - MEMS) e microcontroladores de baixo custo.

Palavras-chave: Determinação da atitude. Triad. Matriz de covariância

Abstract

This article presents a description of the TRIAD algorithm, which utilizes two vector observations for determining a body three-dimensional attitude. This algorithm describes a deterministic form to calculate the attitude and it does not constitute the optimal solution for the problem, but can be implemented efficiently on computers. The Cartesian covariance matrix for this algorithm is also presented. This matrix calculation are addressed in details, resulting in a simple analytical formula based on two different sensor sets measurements in the body frame. The solutions presented are suited to implement highly integrated attitude determination systems that employ MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) technology sensors and low cost microcontrollers.

Key words: Attitude determination. Triad. Covariance matrix.

[1] Professor Colaborador. Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Londrina. E-mail: granziera@uel.br

[2] Tecnologista. INPE. Divisão de Sistemas Espaciais. Cx. Postal 515, São José dos Campos-SP.

[3] Professor. Departamento de engenharia Elétrica. Universidade Estadual de Londrina. E-mail: mctosin@uel.br

Introdução

Este artigo é dedicado aos iniciantes no problema da determinação de atitude e foi concebido como uma referência para aqueles que desejam iniciar-se no estudo do referido problema. Seu objetivo é aproximar a teoria de alto nível e a álgebra usualmente apresentada pelos artigos desta área e dos textos básicos que não descem a pormenores importantes para a compreensão do algoritmo.

O direcionamento principal deste texto foca o problema básico da determinação da atitude de um corpo baseando-se em medidas feitas por tríades de sensores que medem vetores de referência no sistema de coordenadas atual, também referido por sistema de observação. Também se busca determinar a estatística do erro da atitude, ou seja, a matriz de covariância cartesiana da atitude, já que as medidas dos sensores são corrompidas por ruído. A matriz de covariância é de grande importância para inferir a precisão da medida e também é empregada em filtros adaptativos, como no algoritmo da Filtragem de Kalman (GEBRE-EGZIABHER; HAYWARD; POWELL, 2004).

Este texto revisa parte dos resultados de Shuster e Oh (SHUSTER; OH, 1981), no qual são elegantemente apresentadas duas soluções para a determinação da atitude tridimensional de um corpo baseada na observação de vetores. Estas soluções são conhecidas como os algoritmos TRIAD e QUEST. Os autores descrevem primeiramente o TRIAD, um método simples, mas não ótimo, para determinação da atitude baseado em somente dois vetores, e em seguida, descrevem o QUEST um método ótimo que faz uso de dois ou mais vetores de referência.

Este artigo concentra-se na descrição do algoritmo TRIAD. São apresentados com minúcias todos os cálculos, envolvendo álgebra tensorial e estatística, utilizados na obtenção de uma expressão analítica simples para a matriz de covariância cartesiana da atitude como função dos vetores de referência observados no sistema de coordenadas atual e de suas variâncias.

As expressões obtidas para atitude e para matriz de covariância são extremamente importantes, pois viabilizaram sua implementação em computadores de bordo digitais antigos, os quais não eram capazes de realizar grandes quantidades de cálculos em tempo real. Outras formas de implementação da matriz de covariância, anteriores a este resultado, eram complicadas, pois envolviam o cálculo de derivadas parciais, e também, a multiplicação e a soma de matrizes. Sendo assim, não era possível implementar em tempo real aplicações que necessitassem de cálculos freqüentes da matriz de covariância.

As soluções descritas neste artigo foram implementadas e tornaram possíveis missões espaciais durante a década de 70 e 80 (SHUSTER, 2001). Hoje em dia, o desenvolvimento dos sensores MEMS e o aumento da capacidade de processamento dos microcontroladores e processadores digitais de sinais têm permitido a criação de aplicações pessoais baseadas na determinação de atitude de pequenos objetos (DUMAN, 1999). Os sistemas para a determinação de atitude têm suas aplicações em diversas áreas: robótica, monitoração do desempenho de atletas, ergonomia, dispositivos de apontamento para deficientes físicos, dispositivos de interface para jogos ou de manipulação remota, dispositivos de segurança, aplicações espaciais, veículos autônomos não tripulados (Unmanned Autonomous Vehicles – UAV) e nano-satélites, entre outras.

As soluções apresentadas são muito apropriadas para essas novas aplicações, devido a sua simplicidade e ao seu baixo custo computacional, pois isso permite sua implementação nos microcontroladores atuais.

As aplicações descritas inspiraram uma revisão minuciosa do algoritmo TRIAD e de sua matriz de covariância como função de dois vetores de observação.

A atitude de um objeto é a orientação que ele apresenta em relação ao sistema de coordenadas de referência, o qual pode estar no centro da Terra, em uma constelação ou no canto da sala. Como exemplo, a atitude de um navio baseada em um referencial fixo na superfície da Terra pode ser descrita, de maneira simples, por seu apontamento relativo ao norte magnético. A atitude de um corpo é uma quantidade relacionada com sua informação rotacional. A atitude pode ser definida como um operador matemático rotacional, uma matriz ou um quatérnion[4] (KUIPERS, 2002).

Encontrar a atitude é muitas vezes a tarefa de calcular a matriz de rotação que permite realizar a transformação de coordenadas de um vetor arbitrário entre dois sistemas de referência, um inercial e outro fixo no corpo, com base nas coordenadas de um conjunto de vetores, conhecidas em ambos os sistemas. Em princípio, é possível definir uma matriz de atitude $\mathbf{A}$ que satisfaça

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{w}}_i \quad (i = 1, ..., n)\,, \tag{1}$$

onde $\hat{\mathbf{v}}_1, .., \hat{\mathbf{v}}_n$ é um conjunto de vetores unitários medidos no sistema de coordenadas inercial, denominados vetores de referência. As coordenadas dos vetores de referência são a projeção de grandezas vetoriais nos eixos do sistema de referência inercial. Por exemplo, a direção do campo magnético terrestre e a direção da gravidade e a direção do sol podem ser utilizados como grandezas vetoriais de referência ou vetores fonte.

Os vetores $\hat{\mathbf{w}}_1, .., \hat{\mathbf{w}}_n$ são também vetores unitários, cujas coordenadas são dadas pela projeção de cada vetor fonte nos eixos do no sistema de coordenadas do corpo. Esses vetores, por sua vez, são ditos vetores de observação.

Na prática, tanto as medidas dos vetores no sistema de coordenadas do corpo quanto as suas medidas no sistema de coordenadas inercial são corrompidas por ruído e, portanto, a Equação 1 pode não ter solução exata nem mesmo quando houver apenas duas referências vetoriais (n = 2). Para o caso particular em que n = 2, o algoritmo TRIAD oferece uma opção simples para encontrar um valor aproximado para a matriz A de maneira determinística, embora não ótima, mas com um custo computacional relativamente baixo. Quando n > 2, o TRIAD torna-se ineficiente, porque existem $C_{n,2}$ soluções, e nenhuma delas é ótima. Além disso, a matriz de covariância ficaria demasiadamente complicada.

Shuster e Oh propuseram o algoritmo QUEST como uma solução ótima para determinar a atitude quando existem dois ou mais vetores fonte (SHUSTER; OH, 1981). Este algoritmo implementa de modo eficiente a solução formulada por Davenport (denominada “método q”) (WERTZ, 1978) para o problema de minimização da função perda proposta por Wahba (WAHBA, 1966),

$$L(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \left|\mathbf{w}_i - \mathbf{A}\mathbf{v}_i\right|^2 \tag{2}$$

onde é desejável encontrar uma matriz $\mathbf{A}_{\text{opt}}$ que minimiza $L(\mathbf{A})$ com a_i, *i = 1, 2, …, n* sendo um conjunto de pesos não negativos.

Além da otimização da determinação da atitude para n referências, o algoritmo QUEST mantém vantagens computacionais similares aos algoritmos determinísticos. Adicionalmente, e possivelmente mais importante ainda, esse algoritmo fornece uma simples expressão analítica para o cálculo da matriz de covariância, baseada num modelo de erros simplificado para os vetores de referência e de observação.

O Algoritmo TRIAD

Dados dois vetores unitários de referência $\hat{\mathbf{v}}_1$ e $\hat{\mathbf{v}}_2$ ambos projeções dos vetores fonte no sistema de coordenadas inercial e os seus respectivos vetores unitários de observação $\hat{\mathbf{w}}_1$, $\hat{\mathbf{w}}_2$ que são as projeções dos vetores fonte no sistema de coordenadas do corpo,

[4] Em português não há “quatérnio” no dicionário. Em inglês usa-se quaternion, embora também não se encontre esse termo no dicionário de inglês também. O significado básico do termo é conjunto de quatro coisas. Para três coisas, usa-se o substantivo”. Para quatro coisas usa-se a sofrível “quaternidade”, e “quaterno” o adjetivo correspondente. Desse modo, ao invés de optar pelo neologismo de “quatérnio”, usar-se-á “quatérnion” mesmo, até por ser esse o modo como é tradicionalmente utilizado no INPE.

é desejável encontrar uma matriz ortogonal $\mathbf{A}$ que satisfaça, ainda que de modo aproximado, às seguintes equações:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 \qquad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 \tag{3}$$

Para encontrar $\mathbf{A}$ inicialmente constroem-se dois conjuntos de três vetores ortogonais unitários ou tríades, um baseado nos vetores de referência e outro baseado nos vetores de observação, a saber:

$$\hat{\mathbf{r}}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1 \qquad \hat{\mathbf{r}}_2 = \frac{(\hat{\mathbf{v}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_2)}{|\hat{\mathbf{v}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_2|} \qquad \hat{\mathbf{r}}_3 = \frac{(\hat{\mathbf{v}}_1 \times (\hat{\mathbf{v}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_2))}{|\hat{\mathbf{v}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_2|} \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{w}}_1 \qquad \hat{\mathbf{s}}_2 = \frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2)}{|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2|} \qquad \hat{\mathbf{s}}_3 = \frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \times (\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2))}{|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2|} \tag{5}$$

Há somente uma matriz $\mathbf{A}$ que roda $\hat{\mathbf{r}}_i$ para $\hat{\mathbf{s}}_i$, ou seja, que satisfaz a:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{s}}_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6}$$

A Figura 1 mostra a rotação representada pela Equação (6). Os vetores $\hat{\mathbf{r}}_i$ da referência são rodados para a posição dos vetores $\hat{\mathbf{s}}_i$ no sistema de coordenadas de observação.

Dados os vetores $\hat{\mathbf{r}}_i$, é possível agrupá-los para construir uma matriz de referência:

$$\mathbf{M}_{\text{ref}} = [\hat{\mathbf{r}}_1 \vdots \hat{\mathbf{r}}_2 \vdots \hat{\mathbf{r}}_3] \tag{7}$$

Da mesma forma, a matriz de observação pode ser construída por $\hat{\mathbf{s}}_i$:

$$\mathbf{M}_{\text{obs}} = [\hat{\mathbf{s}}_1 \vdots \hat{\mathbf{s}}_2 \vdots \hat{\mathbf{s}}_3] \tag{8}$$

Note-se que $\hat{\mathbf{r}}_i$ e $\hat{\mathbf{s}}_i$ são matrizes de dimensão 3x1.

Agora, a Equação (6) pode ser reescrita de modo a associar a matriz de atitude às matrizes $\mathbf{M}_{\text{obs}}$ e $\mathbf{M}_{\text{ref}}$ como:

$$A\mathbf{M}_{\text{ref}} = \mathbf{M}_{\text{obs}} \tag{9}$$

Ora, as matrizes $\mathbf{M}_{\text{obs}}$ e $\mathbf{M}_{\text{ref}}$ satisfazem às seguintes condições:

$$\mathbf{M}_{\text{obs}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_1^T\hat{\mathbf{s}}_1 & \hat{\mathbf{s}}_2^T\hat{\mathbf{s}}_1 & \hat{\mathbf{s}}_3^T\hat{\mathbf{s}}_1 \\ \hat{\mathbf{s}}_1^T\hat{\mathbf{s}}_2 & \hat{\mathbf{s}}_2^T\hat{\mathbf{s}}_2 & \hat{\mathbf{s}}_3^T\hat{\mathbf{s}}_2 \\ \hat{\mathbf{s}}_1^T\hat{\mathbf{s}}_3 & \hat{\mathbf{s}}_2^T\hat{\mathbf{s}}_3 & \hat{\mathbf{s}}_3^T\hat{\mathbf{s}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_{\text{ref}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_1^T\hat{\mathbf{r}}_1 & \hat{\mathbf{r}}_2^T\hat{\mathbf{r}}_1 & \hat{\mathbf{r}}_3^T\hat{\mathbf{r}}_1 \\ \hat{\mathbf{r}}_1^T\hat{\mathbf{r}}_2 & \hat{\mathbf{r}}_2^T\hat{\mathbf{r}}_2 & \hat{\mathbf{r}}_3^T\hat{\mathbf{r}}_2 \\ \hat{\mathbf{r}}_1^T\hat{\mathbf{r}}_3 & \hat{\mathbf{r}}_2^T\hat{\mathbf{r}}_3 & \hat{\mathbf{r}}_3^T\hat{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Então, as matrizes $\mathbf{M}_{\text{obs}}$ e $\mathbf{M}_{\text{ref}}$ podem ser ditas ortogonais. Portanto,

$$\mathbf{M}_{\text{obs}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}_{\text{obs}}^{-1} \qquad \mathbf{M}_{\text{obs}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}_{\text{obs}}^{-1} \tag{10}$$

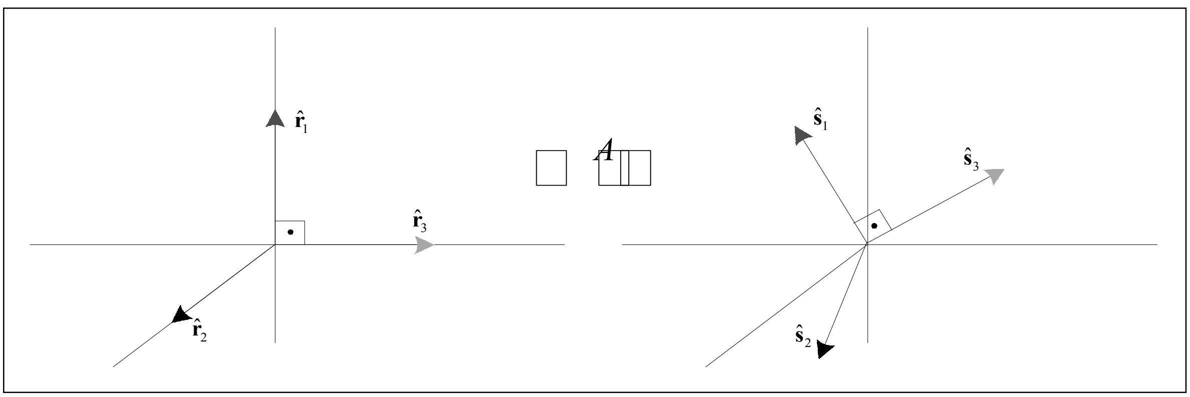

Figura 1. Representação gráfica da rotação dada por matriz de atitude. A matriz $\mathbf{A}$ gira o sistema de coordenadas de referência para o sistema de coordenadas de observação.

Então, é possível isolar a matriz de atitude multiplicando ambos os lados da Equação (9) por $\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{T}$, então $\mathbf{A}\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{T} = \mathbf{M}_{\mathrm{obs}}\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{T}$.

Dessa forma, a matriz de atitude será dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathrm{obs}}\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{T} \tag{11}$$

A Equação (11) representa a solução do algoritmo TRIAD para a atitude. Outra forma para expressá-la é:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\mathbf{s}}_i \hat{\mathbf{r}}_i^{T} \tag{12}$$

Um condição necessária e suficiente para a matriz de atitude assim obtida satisfazer de modo exato à Equação (3) é :

$$\hat{\mathbf{v}}_1 \bullet \hat{\mathbf{v}}_2 = \hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2 \tag{13}$$

Neste caso, como conseqüência, a seguinte relação se satisfaz:

$$\left|\hat{\mathbf{v}}_1 \times \hat{\mathbf{v}}_2\right| = \left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right| \tag{14}$$

É interessante notar, nas equações (4) e (5), que os vetores $\hat{\mathbf{r}}_3$ e $\hat{\mathbf{s}}_3$ não são obtidos por cálculos simétricos. Isso acontece porque os vetores $\hat{\mathbf{v}}_1$ e $\hat{\mathbf{w}}_1$ são usados duas vezes, enquanto os vetores $\hat{\mathbf{v}}_2$ e $\hat{\mathbf{w}}_2$ são utilizados apenas uma vez durante os cálculos de $\hat{\mathbf{r}}_3$ e $\hat{\mathbf{s}}_3$. Devido a essa assimetria, deve-se escolher a referência mais precisa para as variáveis $\hat{\mathbf{v}}_1$ e $\hat{\mathbf{w}}_1$.

Como exemplo para o uso deste algoritmo, considere-se um sistema simples para a determinação da atitude, que utiliza o algoritmo TRIAD e possui duas tríades de sensores que adquirem informações de dois vetores fonte diferentes. Os vetores $\hat{\mathbf{v}}_i$ podem ser calculados inicialmente por meio da leitura dos sensores em uma posição pré determinada. Esta posição determina o sistema de coordenadas de referência. Os valores médios e normalizados destas leituras constituem os vetores $\hat{\mathbf{v}}_i$, tal como em um processo de calibração. Esses valores de calibração são empregados para calcular a atitude durante toda a utilização do sistema.

Assim, o sistema está pronto para rodar e a partir dos valores medidos dos sensores no sistema de coordenadas do corpo, podem ser construídos os vetores de observação $\hat{\mathbf{w}}_i$. Fazendo uso das Equações (4) e (5), os vetores $\hat{\mathbf{r}}_i$ e $\hat{\mathbf{s}}_i$ podem ser montados e, em seguida, as matrizes $\mathbf{M}_{\mathrm{obs}}$ e $\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}$ podem ser construídas como mostrado em (7) e (8), respectivamente. Fazendo a transposta da matriz de referência e fazendo a multiplicação da Equação (11) tem-se a matriz de atitude. Os valores de $\hat{\mathbf{w}}_i$ são adquiridos freqüentemente dos sensores e o sistema deve ser capaz de calcular as matrizes de atitude em uma freqüência suficientemente alta para descrever corretamente eventuais movimentos de rotação ao longo do tempo.

A Matriz de Covariância do TRIAD

A Matriz de covariância do TRIAD é muito importante e pode ser utilizada para descrever estatisticamente o erro de atitude em um sistema dinâmico. Neste artigo, o objetivo é descrever, de forma simples e analítica, a matriz de covariância cartesiana da atitude, a qual, depende somente das medidas dos valores $\hat{\mathbf{v}}_i$ e $\hat{\mathbf{w}}_i$. Esta matriz é muito útil em um sistema que use um Filtro de Kalman (LEFFERTS; MARKLEY; SHUSTER, 1982) ou na fusão dados dos sensores de referência e dados de sensores giroscópicos, por exemplo (GEBRE-EGZIABHER; HAYWARD; POWELL, 2004). A simplicidade do algoritmo TRIAD, tanto para determinação, quanto para a análise de erros, torna o sistema implementável em sistemas embarcados atuais, considerados de baixo poder de processamento.

O vetor erro dos ângulos é dado por:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \left(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3\right)^{T} \tag{15}$$

Ele é definido como o conjunto de ângulos que roda a matriz exata da atitude para matriz de atitude medida. Então, para pequenos ângulos, tem-se:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \Omega(\delta\boldsymbol{\theta}))\langle\mathbf{A}\rangle = \begin{bmatrix} 1 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2 \\ -\delta\theta_3 & 1 & \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 1 \end{bmatrix}\langle\mathbf{A}\rangle \tag{16}$$

onde o valor entre colchetes indica o valor médio e $\Omega(\cdot)$ é um operador definido como:

$$-\Omega(\delta\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \delta\theta_3 & -\delta\theta_2 \\ -\delta\theta_3 & 0 & \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 & -\delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

A matriz de covariância Cartesiana da atitude é definida como:

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \left\langle \delta\theta\delta\theta^T \right\rangle \tag{18}$$

A substituição do vetor de erros definido pela Equação (15) na (18), resulta em:

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \left\langle \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \delta\theta_1^2 & \delta\theta_1\delta\theta_2 & \delta\theta_1\delta\theta_3 \\ \delta\theta_2\delta\theta_1 & \delta\theta_2^2 & \delta\theta_2\delta\theta_3 \\ \delta\theta_3\delta\theta_1 & \delta\theta_3\delta\theta_2 & \delta\theta_3^2 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{19}$$

Para implementação computacional eficiente, é conveniente examinar a matriz de covariância definida como,

$$\mathbf{P} = \left\langle \delta\mathbf{A}\delta\mathbf{A}^T \right\rangle \tag{20}$$

onde

$$\delta\mathbf{A} = \mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle \tag{21}$$

Considerando a Equação (16) que define o erro incluso dentro de $\mathbf{A}$ e a matriz de covariância Cartesiana da atitude definida pela Equação (18), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \left\langle \delta\mathbf{A}\delta\mathbf{A}^T \right\rangle \\ \mathbf{P} &= \left\langle \big((\mathbf{I} - \Omega(\delta\boldsymbol{\theta}))\langle\mathbf{A}\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle\big)\big((\mathbf{I} - \Omega(\delta\boldsymbol{\theta}))\langle\mathbf{A}\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle\big)^T \right\rangle \\ \mathbf{P} &= \left\langle (\langle\mathbf{A}\rangle - \Omega(\delta\boldsymbol{\theta})\langle\mathbf{A}\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle)(\langle\mathbf{A}\rangle - \Omega(\delta\boldsymbol{\theta})\langle\mathbf{A}\rangle - \langle\mathbf{A}\rangle)^T \right\rangle \\ \mathbf{P} &= \left\langle \Omega(\delta\boldsymbol{\theta})\langle\mathbf{A}\rangle\langle\mathbf{A}\rangle^T \Omega(\delta\boldsymbol{\theta})^T \right\rangle \end{aligned}$$

Como $\langle\mathbf{A}\rangle\langle\mathbf{A}\rangle^T = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}$ é dada por:

$$\mathbf{P} = \left\langle \Omega(\delta\boldsymbol{\theta})\Omega(\delta\boldsymbol{\theta})^T \right\rangle \tag{22}$$

Abrindo a multiplicação da Equação (22), obtém-se:

$$\mathbf{P} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 & 0 & -\delta\theta_1 \\ -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ \delta\theta_3 & 0 & -\delta\theta_1 \\ -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\rangle$$

resultando em

$$\mathbf{P} = \left\langle \begin{bmatrix} \delta\theta_3^2 + \delta\theta_2^2 & -\delta\theta_1\delta\theta_2 & -\delta\theta_1\delta\theta_3 \\ -\delta\theta_1\delta\theta_2 & \delta\theta_3^2 + \delta\theta_1^2 & -\delta\theta_2\delta\theta_3 \\ -\delta\theta_1\delta\theta_3 & -\delta\theta_2\delta\theta_3 & \delta\theta_1^2 + \delta\theta_2^2 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{23}$$

Observando as Equações (19) e (23), verifica-se uma relação entre os traços de suas matrizes. Essa relação assim de define:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}) = 2\left\langle \delta\boldsymbol{\theta}^T\delta\boldsymbol{\theta} \right\rangle = 2\mathrm{tr}(\mathbf{P}_{\theta\theta}) \tag{24}$$

Agora, expandindo $\mathbf{P}$ em sua forma matricial, resulta em:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \left\langle \Omega(\delta\boldsymbol{\theta})\Omega(\delta\boldsymbol{\theta})^T \right\rangle \\ \mathbf{P} &= \left\langle \delta\boldsymbol{\theta}^T\delta\boldsymbol{\theta}\mathbf{I} - \delta\boldsymbol{\theta}\delta\boldsymbol{\theta}^T \right\rangle \\ \mathbf{P} &= \left\langle \delta\boldsymbol{\theta}^T\delta\boldsymbol{\theta} \right\rangle \mathbf{I} - \left\langle \delta\boldsymbol{\theta}\delta\boldsymbol{\theta}^T \right\rangle \\ \mathbf{P} &= \left\langle \delta\boldsymbol{\theta}^T\delta\boldsymbol{\theta} \right\rangle \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\theta\theta} \end{aligned}$$

Considerando a relação dada pela Equação (24) que fornece o valor de $\left\langle \delta\boldsymbol{\theta}\delta\boldsymbol{\theta}^T \right\rangle$ em função de $\mathbf{P}$ e de $\mathbf{P}_{\theta\theta}$, é possível estabelecer as seguintes relações entre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_{\theta\theta}$:

$$\mathbf{P} = \mathrm{tr}(\mathbf{P}_{\theta\theta})\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\theta\theta} \tag{25}$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathbf{P})\mathbf{I} - \mathbf{P} \tag{26}$$

A relação descrita pela Equação (26) torna o cálculo de $\mathbf{P}_{\theta\theta}$ mais eficiente, pois o cálculo de $\mathbf{P}$ está relacionado como a atitude e seu erro, como descrito pelas equações (20) e (21).

Por outro lado, da Equação (9) segue que

$$\delta\mathbf{A}\,\mathbf{M}_{\mathrm{ref}} + \mathbf{A}\,\delta\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} = \delta\mathbf{M}_{\mathrm{obs}}$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}}$ e isolando $\delta\mathbf{A}$ obtém-se:

$$\delta\mathbf{A} = (\delta\mathbf{M}_{\text{obs}} - \mathbf{A}\,\delta\mathbf{M}_{\text{ref}})\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}}$$

Com isso, é possível descrever $\mathbf{P}$ como uma função das matrizes de observação, referência e atitude.

$$\mathbf{P} = \left\langle \delta\mathbf{A}\delta\mathbf{A}^{T} \right\rangle$$
$$\mathbf{P} = \left\langle (\delta\mathbf{M}_{\text{obs}} - \mathbf{A}\,\delta\mathbf{M}_{\text{ref}})\,\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}}\;\mathbf{M}_{\text{ref}}\,(\delta\mathbf{M}_{\text{obs}}^{\text{T}} - \delta\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}}\mathbf{A}^{\text{T}}) \right\rangle$$
$$\mathbf{P} = \left\langle \delta\mathbf{M}_{\text{obs}}\;\delta\mathbf{M}_{\text{obs}}^{\text{T}} + \mathbf{A}\,\delta\mathbf{M}_{\text{ref}}\;\delta\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}}\mathbf{A}^{\text{T}} - \delta\mathbf{M}_{\text{obs}}\;\delta\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}}\mathbf{A}^{\text{T}} - \mathbf{A}\,\delta\mathbf{M}_{\text{ref}}\;\delta\mathbf{M}_{\text{obs}}^{\text{T}}) \right\rangle$$

Sabendo que os erros lidos no sistema de referência e de observação não estão correlacionados, os termos $\left\langle \delta\mathbf{M}_{\text{obs}}\delta\mathbf{M}_{\text{ref}}^{T} \right\rangle$ e $\left\langle \delta\mathbf{M}_{\text{ref}}\delta\mathbf{M}_{\text{obs}}^{T} \right\rangle$ desaparecem, resultando em

$$\mathbf{P} = \left\langle \delta\mathbf{M}_{\text{obs}}\delta\mathbf{M}_{\text{obs}}^{\text{T}} \right\rangle + \mathbf{A}\left\langle \delta\mathbf{M}_{\text{ref}}\delta\mathbf{M}_{\text{ref}}^{\text{T}} \right\rangle \mathbf{A}^{\text{T}} \qquad (27)$$

Denominando o primeiro termo de $\mathbf{P}$ como $\mathbf{P}_{\text{obs}}$ e o segundo como $\mathbf{A}\mathbf{P}_{\text{ref}}\mathbf{A}^{\text{T}}$, então

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{obs}} + \mathbf{A}\mathbf{P}_{\text{ref}}\mathbf{A}^{\text{T}} \qquad (28)$$

A Equação (28) mostra a relação da covariância com as matrizes de observação e referência. Agora, as covariâncias têm que ser representadas como função dos vetores de observação e referência. Para fazer isto, o primeiro passo é analisar e entender a covariância destes vetores unitários, também denominados versores.

A Covariância de um versor

Tanto $\hat{\mathbf{w}}_m$ quanto $\hat{\mathbf{v}}_m$ são vetores unitários. Eles apresentam variação ou erro somente em duas dimensões, já que os versores sempre mantêm seus módulos unitários. Assim, o erro que ocorre nos vetores de observação e referência são ortogonais aos próprios versores, pois eles devem estar contidos no plano perpendicular ao versor. Portanto, os erros dos versores $\delta\hat{\mathbf{w}}_m$ e $\delta\hat{\mathbf{v}}_m$, possuem somente dois graus de liberdade.

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathbf{w}}_m \bullet \hat{\mathbf{w}}_m &= 0 \\ \delta\hat{\mathbf{v}}_m \bullet \hat{\mathbf{v}}_m &= 0 \end{aligned} \qquad (29)$$

Um vetor unitário pode ser definido como:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\text{T}}\mathbf{x}}} \qquad (30)$$

A variância do erro de um vetor unitário será:

$$\text{var}(\hat{\mathbf{x}}) = \left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}} \right\rangle \qquad (31)$$

A relação entre o erro em um vetor sem qualquer vínculo e o erro em seu valor normalizado é dada por:

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{d\mathbf{x}}\,\delta\mathbf{x}$$
$$\delta\hat{\mathbf{x}} = \frac{\delta\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^{\text{T}}\mathbf{x}}} - \frac{\mathbf{x}}{2}(\mathbf{x}^{\text{T}}\mathbf{x})^{-\frac{3}{2}}(2\mathbf{x}^{\text{T}})\delta\mathbf{x}$$
$$\delta\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^{T}}{|\mathbf{x}|^{2}}\right]\delta\mathbf{x}\,,$$

Onde $\mathbf{I}$ representa a matriz identidade.

Colocando a expressão acima como função dos versores, então:

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}[\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}}]\delta\mathbf{x} \qquad (32)$$

A variância pode ser calculada substituindo a Equação (32) na (31), resultando em:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}} \right\rangle = \left\langle (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}})\frac{\delta\mathbf{X}}{|\mathbf{x}|}\left((\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}})\frac{\delta\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)^{\text{T}} \right\rangle$$
$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}} \right\rangle = \left\langle (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}})\frac{\delta\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\frac{\delta\mathbf{x}^{\text{T}}}{|\mathbf{x}|}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}})^{\text{T}} \right\rangle$$
$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}} \right\rangle = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}})\frac{\left\langle \delta\mathbf{x}\delta\mathbf{x}^{\text{T}} \right\rangle}{|\mathbf{x}|^{2}}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\text{T}})^{\text{T}} \qquad (33)$$

Visto que o módulo de $\mathbf{x}$ não está restrito a um valor fixo, o erro $\delta\mathbf{x}$ pode ocorrer em qualquer direção. Considerando que a distribuição de $\delta\mathbf{x}$ seja a mesma em todas as direções, a sua covariância é dada por:

$$\left\langle \delta\mathbf{x}\;\delta\mathbf{x}^{\mathbf{T}} \right\rangle = \mathbf{I}\,|\mathbf{x}|^{2}\,\sigma_{\mathbf{x}}^{2}$$

Onde $|\mathbf{x}|\sigma_{\mathbf{x}}$ representa o desvio padrão da distribuição de $\delta\mathbf{x}$.

Observando as seguintes propriedades:

$$(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \tag{34a}$$

$$(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})^{n} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \tag{34b}$$

$$(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \tag{34c}$$

$$(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})^{n} = \mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \tag{34d}$$

A Equação (33) pode ser reduzida para:

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \right\rangle &= (\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})\mathbf{I}\sigma_{\mathbf{x}}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}) \\
\left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \right\rangle &= \sigma_{\mathbf{x}}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}) \\
\left\langle \delta\hat{\mathbf{x}}\delta\hat{\mathbf{x}}^{T} \right\rangle &= \sigma_{\mathbf{x}}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^{T})
\end{aligned} \tag{35}$$

Aplicando a Equação (35) para o cálculo das covariâncias de $\delta\hat{\mathbf{v}}_m$ e $\delta\hat{\mathbf{w}}_m$, as seguintes covariâncias são obtidas:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{w}}_1\delta\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sigma_{\mathbf{w}_1}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) \tag{36a}$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{w}}_2\delta\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sigma_{\mathbf{w}_2}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}) \tag{36b}$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{v}}_1\delta\hat{\mathbf{v}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sigma_{\mathbf{v}_1}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{v}}_1\hat{\mathbf{v}}_1^{T}) \tag{36c}$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{v}}_2\delta\hat{\mathbf{v}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sigma_{\mathbf{v}_2}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{v}}_2\hat{\mathbf{v}}_2^{\mathbf{T}}) \tag{36d}$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{v}}_1\delta\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle = \left\langle \delta\hat{\mathbf{v}}_2\delta\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = 0 \tag{36e}$$

A Equação (36e) resulta da hipótese de que os erros nas observações não são correlacionados com os erros das referências.

Calculando $\mathbf{P}_{\mathrm{ref}}$ e $\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}$

A matriz de covariância $\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}$ pode ser escrita em função dos vetores $\hat{\mathbf{s}}_i$.

$$\mathbf{P}_{\mathrm{obs}} = \left\langle \delta\mathbf{M}_{\mathrm{obs}}\delta\mathbf{M}_{\mathrm{obs}}^{T} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3}\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_i\delta\hat{\mathbf{s}}_i^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{obs}} = \left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle + \left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle + \left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_3\delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{37}$$

Da mesma forma, $\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}$ pode ser definido em função dos vetores $\hat{\mathbf{r}}_i$:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ref}} = \left\langle \delta\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}\delta\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sum_{i=1}^{3}\left\langle \delta\hat{\mathbf{r}}_i\delta\hat{\mathbf{r}}_i^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ref}} = \left\langle \delta\hat{\mathbf{r}}_1\delta\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle + \left\langle \delta\hat{\mathbf{r}}_2\delta\hat{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle + \left\langle \delta\hat{\mathbf{r}}_3\delta\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{38}$$

Agora, as covariâncias descritas nas Equações (37) e (38) podem ser escritas em termos dos vetores $\delta\hat{\mathbf{v}}_n$ e $\delta\hat{\mathbf{w}}_n$. Fazendo uso da Equação (33) como ponto de partida, a covariância de $\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle$ será:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{|\mathbf{s}_1|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{T})\delta\mathbf{s}_1\delta\mathbf{s}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\frac{1}{|\mathbf{s}_1|} \right\rangle$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = \frac{1}{|\mathbf{s}_1|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\left\langle \delta\mathbf{s}_1\delta\mathbf{s}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\frac{1}{|\mathbf{s}_1|}$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = (\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\mathbf{I}\sigma_{\mathbf{w}_1}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sigma_{\mathbf{w}_1}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})$$

A expressão final torna-se:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle = \sigma_{\mathbf{w}_1}^{2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) \tag{39}$$

Da mesma maneira, $\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle$ pode ser calculada a partir da Equação (33), então:

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\frac{1}{|\mathbf{s}_2|} \right\rangle \\
\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle &= \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^{2}}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{40}$$

Sabendo que $\mathbf{s}_2 = \hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2$ e $|\mathbf{s}_2| = |\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|$, a covariância $\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle$ pode ser calculada, mas, inicialmente, o vetor erro $\delta\mathbf{s}_2$ tem de ser definido como função dos vetores $\delta\hat{\mathbf{w}}_m$, então:

$$\delta\mathbf{s}_2 = \delta(\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2) = \delta\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2 + \hat{\mathbf{w}}_1\times\delta\hat{\mathbf{w}}_2 = -\hat{\mathbf{w}}_2\times\delta\hat{\mathbf{w}}_1 + \hat{\mathbf{w}}_1\times\delta\hat{\mathbf{w}}_2$$

O produto vetorial pode ser escrito por meio do operador $\Omega(\cdot)$, da seguinte maneira:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \Omega(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\Omega(\mathbf{b})\mathbf{a}\,.$$

Assim sendo,

$$\delta \mathbf{s}_2 = -\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{w}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\delta\hat{\mathbf{w}}_2$$

Então, a covariância de $\delta\mathbf{s}_2$ será:

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \left\langle \left(\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{w}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\delta\hat{\mathbf{w}}_2\right)\left(\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{w}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\delta\hat{\mathbf{w}}_2\right)^{\mathrm{T}}\right\rangle$$

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \left\langle \Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{w}}_1\delta\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}}\right\rangle + \left\langle \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\delta\hat{\mathbf{w}}_2\delta\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}\right\rangle$$

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\left\langle \delta\hat{\mathbf{w}}_1\delta\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}} + \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\left\langle \delta\hat{\mathbf{w}}_2\delta\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\sigma_{\mathrm{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}})\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}} + \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\sigma_{\mathrm{w}_2}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}})\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{T}\right\rangle = \sigma_{\mathrm{w}_1}^2\begin{pmatrix}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}}\\ -\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} + \sigma_{\mathrm{w}_2}^2\begin{pmatrix}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}\\ -\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} \quad (41)$$

A matriz Ω tem a seguinte propriedade:

$$\Omega(\mathbf{a})\Omega(\mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathrm{T}} \quad (42)$$

Onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são dois vetores quaisquer

Assim, aplicando esta propriedade na Equação (41), segue que:

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \sigma_{\mathrm{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2) + \sigma_{\mathrm{w}_2}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2)$$

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \sigma_{\mathrm{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{T}) + \sigma_{\mathrm{w}_2}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) - (\sigma_{\mathrm{w}_1}^2+\sigma_{\mathrm{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2 \quad (43)$$

Agora, é possível continuar a descrever Equação (40), então:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{T}\right\rangle = \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\left\langle \delta\mathbf{s}_2\delta\mathbf{s}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{T}\right\rangle = \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}) + \sigma_{\mathrm{w}_2}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}})\\ -(\sigma_{\mathrm{w}_1}^2+\sigma_{\mathrm{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2\end{bmatrix}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})$$

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}\begin{bmatrix}\sigma_{\mathrm{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) + \sigma_{\mathrm{w}_2}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\\ -(\sigma_{\mathrm{w}_1}^2+\sigma_{\mathrm{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2 + (\sigma_{\mathrm{w}_1}^2+\sigma_{\mathrm{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2\end{bmatrix}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})$$

Assim

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle = \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}\left[\sigma_{\mathrm{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) + \sigma_{\mathrm{w}_2}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\right] \quad (44)$$

O resultado apresentado pela Equação (44) tem um termo dependente de $\hat{\mathbf{w}}_2$. O vetor $\hat{\mathbf{w}}_2$ não pertence à tríade ortogonal formada por $\hat{\mathbf{s}}_1$, $\hat{\mathbf{s}}_2$ e $\hat{\mathbf{s}}_3$, mas pode ser escrito como uma função dos vetores $\hat{\mathbf{s}}_1$ e $\hat{\mathbf{s}}_3$, como:

$$\hat{\mathbf{w}}_2 = \hat{\mathbf{s}}_1(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2) - \hat{\mathbf{s}}_3|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2| \quad (45)$$

A Figura 2 mostra que $\hat{\mathbf{w}}_2$ está no plano formado por $\hat{\mathbf{s}}_1$ e $\hat{\mathbf{s}}_3$. Isso também pode ser verificado pela Equação (5).

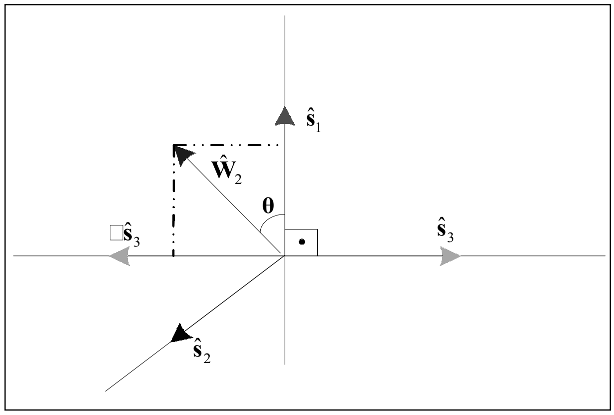

Figura 2. Ilustração mostrando que $\hat{\mathbf{w}}_2$ está no mesmo plano formado por $\hat{\mathbf{s}}_1$ e $\hat{\mathbf{s}}_3$. As constantes $(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)$ e $|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|$ são, respectivamente, o co-seno e o seno dos ângulos entre os vetores $\hat{\mathbf{w}}_1$ e $\hat{\mathbf{w}}_2$. Então, a seguinte identidade trigonométrica é válida.

$$(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)^2 + |\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|^2 = 1 \quad (46)$$

Usando as relações descritas acima pelas Equações (45) e (46) e sabendo que $|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2| = |\mathbf{s}_2|$, o termo $\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}$ será:

$$\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} = \left(\hat{\mathbf{s}}_1(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2) - \hat{\mathbf{s}}_3|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|\right)\left(\hat{\mathbf{s}}_1(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2) - \hat{\mathbf{s}}_3|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)^2 + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2 - (\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)|\mathbf{s}_2|$$

$$\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}(1-|\mathbf{s}_2|^2) + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2 - (\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)|\mathbf{s}_2|$$

$$\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2 + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}|\mathbf{s}_2|^2 - (\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)|\mathbf{s}_2|$$

Assim a Equação (44) pode ser escrita como:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2 \delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle = \frac{1}{\left|\mathbf{s}_2\right|^2}\left[\sigma_{\mathbf{w}_1}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\left|\mathbf{s}_2\right|^2 - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}\left|\mathbf{s}_2\right|^2 \\ +(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)\left|\mathbf{s}_2\right| \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sigma_{\mathbf{w}_2}^2 \left(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\right)\right] \tag{47}$$

Uma relação simples, mas importante é o fato de que a soma dos produtos de vetores unitários que formam uma tríade resulta a matriz Identidade, assim:

$$\sum_{i=1}^{3}\hat{\mathbf{s}}_i\hat{\mathbf{s}}_i^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \tag{48}$$

Finalmente, é possível reagrupar os termos na Equação (47) e escrevê-la como:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2 \delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle = \frac{1}{\left|\mathbf{s}_2\right|^2}\left(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2 + \sigma_{\mathbf{w}_2}^2\right)\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \sigma_{\mathbf{w}_1}^2\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}\right) +$$

$$+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2 \frac{\left(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2\right)}{\left|\mathbf{s}_2\right|}\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\right) \tag{49}$$

Dado que $\mathbf{s}_3 = \hat{\mathbf{s}}_3$, é resultante do produto vetorial entre $\hat{\mathbf{s}}_1$ e $\hat{\mathbf{s}}_2$ (vetores ortogonais e unitários) então a covariância de $\delta\mathbf{s}_3$ pode ser representada como:

$$\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_3 \delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} \right\rangle = \left\langle \delta\mathbf{s}_3 \delta\mathbf{s}_3^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{50}$$

Assim, o diferencial de $\mathbf{s}_3$ é dado por:

$$\delta\mathbf{s}_3 = \delta(\hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{s}}_2) = \delta\hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{s}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_1 \times \delta\hat{\mathbf{s}}_2$$
$$\delta\mathbf{s}_3 = -\hat{\mathbf{s}}_2 \times \delta\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_1 \times \delta\hat{\mathbf{s}}_2$$
$$\delta\mathbf{s}_3 = -\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{s}}_2$$

Então, a covariância de $\delta\mathbf{s}_3$ é dada por:

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_3 \delta\mathbf{s}_3^{T} \right\rangle = \left\langle \left(-\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\right)\left(-\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

$$\left\langle \delta\mathbf{s}_3 \delta\mathbf{s}_3^{\mathrm{T}} \right\rangle = \mathbf{P}_{11} - \mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{22} \tag{51}$$

Onde as covariâncias cruzadas definidas por $\mathbf{P}_{ij}$ podem ser visualmente definidas das equações acima. As covariâncias $\mathbf{P}_{ij}$ são dadas por:

$$\mathbf{P}_{11} = \left\langle \Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_2\right)\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_2\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{52a}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \left\langle \Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_2\right)\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_1\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{52b}$$

$$\mathbf{P}_{21} = \left\langle \Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_1\right)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_2\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{52c}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \left\langle \Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_1\right)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_1\right)^{\mathrm{T}} \right\rangle \tag{52d}$$

Os cálculos destas covariâncias em termos dos vetores $\hat{\mathbf{s}}_i$ são mostrados abaixo. O termo $\mathbf{P}_{11}$ pode ser expresso como:

$$\mathbf{P}_{11} = \left\langle \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{11} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \right\rangle\Omega\left(\hat{\mathbf{s}}_2\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \sigma_{\mathbf{w}_1}^2\left(\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}} - \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{P}_{11} = \sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}})$$

Aplicando a Equação (48), $\mathbf{P}_{11}$ se tornará:

$$\mathbf{P}_{11} = \sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} \tag{53}$$

Da mesma forma, $\mathbf{P}_{22}$ pode ser calculado como:

$$\mathbf{P}_{22} = \left\langle \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^{\mathrm{T}} \right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{22} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^{\mathrm{T}}$$

Substituindo a Equação (49) na equação acima:

$$\mathbf{P}_{22} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\left[\frac{1}{\left|\mathbf{s}_2\right|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2 + \sigma_{\mathbf{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}) + \right.$$

$$\left. + \sigma_{\mathbf{w}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\mathbf{s}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\right]\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{w_1}^2 + \sigma_{w_2}^2)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^T\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T + \sigma_{w_1}^2\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^T -$$

$$-\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T + \sigma_{w_1}^2 \frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^T + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

e notando que os seguintes produtos cruzados são:

$$\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\hat{\mathbf{s}}_1 = 0 \tag{54a}$$

$$\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\hat{\mathbf{s}}_3 = -\hat{\mathbf{s}}_2 \tag{54b}$$

a expressão descrevendo $\mathbf{P}_{22}$ se reduz a:

$$\mathbf{P}_{22} = \frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{w_1}^2 + \sigma_{w_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T - \sigma_{w_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T \tag{55}$$

O termo $\mathbf{P}_{12}$ pode ser descrito como:

$$\mathbf{P}_{12} = \left\langle \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_2^T\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T \right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{12} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_2^T \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

Mas $\delta\hat{\mathbf{s}}_2$, dado pela Equação (32), pode ser substituído na equação acima como segue:

$$\mathbf{P}_{12} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\left[\frac{1}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\delta\mathbf{s}_2\right]^T \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

Utilizando a relação para $\delta\mathbf{s}_2$ definida como:

$$\delta\mathbf{s}_2 = \delta(\hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2) = \delta\hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_1 \times \delta\hat{\mathbf{w}}_2$$

a equação de $\mathbf{P}_{12}$ se torna:

$$\mathbf{P}_{12} = \frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1(\delta\hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2 + \hat{\mathbf{s}}_1 \times \delta\hat{\mathbf{w}}_2)^T \right\rangle(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

$$\mathbf{P}_{12} = \frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\left(-\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1 + \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{w}}_2\right)^T \right\rangle(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

$$\mathbf{P}_{12} = \frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}\left\langle -\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^T\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^T + \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{w}}_2^T\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T \right\rangle(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

Pelo fato de, por hipótese, não haver correlação entre os erros em $\hat{\mathbf{w}}_1$ e em $\hat{\mathbf{w}}_2$, o termo $\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{w}}_2^T$ se anula, então:

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}\left\langle \delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^T \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^T(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

Substituindo a covariância de $\delta\hat{\mathbf{s}}_1$ da Equação (39), então:

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}\sigma_{w_1}^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^T)\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^T(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\sigma_{w_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}\left(\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^T - \Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^T\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)^T\right)(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

Agora, aplicando novamente a propriedade mostrada pela Equação (42) e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \Omega(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\Omega(\mathbf{b})\mathbf{a}$, então:

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\sigma_{w_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}(-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^T - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_2^T|\mathbf{s}_2|)(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\sigma_{w_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}(-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{w}}_2^T)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

Substituindo $\hat{\mathbf{w}}_2$ da Equação (45) então:

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\sigma_{w_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}[-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_1^T(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2) + \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^T|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2|]\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\sigma_{w_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}[-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_1^T(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2) + \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^T|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2|]\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

$$\mathbf{P}_{12} = -\frac{\sigma_{w_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2|\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^T\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)^T$$

E, finalmente, $\mathbf{P}_{12}$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{P}_{12} = \sigma_{w_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T \tag{56}$$

O termo $\mathbf{P}_{21}$ pode ser calculado da mesma forma descrita para $\mathbf{P}_{12}$:

$$\mathbf{P}_{21} = \left\langle \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_1^T\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^T \right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{21} = \Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\left\langle \frac{1}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_1^T \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^T$$

$$\mathbf{P}_{21} = \frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\left\langle \delta(\hat{\mathbf{s}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1^T \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^T$$

$$\mathbf{P}_{21} = \frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^T)\left\langle (\hat{\mathbf{w}}_2 \times \delta\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_1 \times \delta\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1^T \right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^T$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\left\langle\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}+\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\delta\hat{\mathbf{w}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{T}\right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\left\langle\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\right\rangle\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{T})\sigma_{\mathbf{w}_1}^2[\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}-\Omega(\hat{\mathbf{w}}_2)\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}]$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{I}-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-|\mathbf{s}_2|\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})(-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-|\mathbf{s}_2|\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(-\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-|\mathbf{s}_2|\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+|\mathbf{s}_2|\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{P}_{21}=-\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\hat{\mathbf{s}}_1(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)-\hat{\mathbf{s}}_3|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|)\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{21}=-\frac{\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)}{|\mathbf{s}_2|}\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\left(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)-\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|\right)$$

$$\mathbf{P}_{21}=\frac{\sigma_{\mathbf{w}_1}^2}{|\mathbf{s}_2|}\Omega(\hat{\mathbf{s}}_1)\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|$$

Resultando em:

$$\mathbf{P}_{21}=-\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \tag{57}$$

Agora, continuando o cálculo da covariância de $\delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}$ da Equação (51), então:

$$\left\langle\delta\hat{\mathbf{s}}_3\delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}\right\rangle=\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2+\sigma_{\mathbf{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}$$

Simplificando esta expressão, a covariância final para $\delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}$ se torna:

$$\left\langle\delta\hat{\mathbf{s}}_3\delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}\right\rangle=\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2+\sigma_{\mathbf{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} \tag{58}$$

Os resultados apresentados nas Equações (39), (49) e (58) são termos parciais que quando substituídos na Equação (37), resultam:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}=\left\langle\delta\hat{\mathbf{s}}_1\delta\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}\right\rangle+\left\langle\delta\hat{\mathbf{s}}_2\delta\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle+\left\langle\delta\hat{\mathbf{s}}_3\delta\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}\right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}=\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})+\frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2+\sigma_{\mathbf{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}})+$$

$$+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}$$

$$+\frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2+\sigma_{\mathbf{w}_2}^2)\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}-\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}$$

Agrupando os termos similares e substituindo

$|\mathbf{s}_2|=|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|$, então:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}&=\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\\&+\frac{1}{|\mathbf{s}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2+\sigma_{\mathbf{w}_2}^2)(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{|\mathbf{s}_2|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}&=\sigma_{\mathbf{w}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})\\&+\frac{1}{|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{w}_1}^2+\sigma_{\mathbf{w}_2}^2)(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})+\sigma_{\mathbf{w}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{59}$$

O cálculo de $\mathbf{P}_{\mathrm{ref}}$ segue o mesmo procedimento para o cálculo de $\mathbf{P}_{\mathrm{obs}}$. A solução será similar a Equação (59), então:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ref}}=\left\langle\delta\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}\delta\mathbf{M}_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{T}}\right\rangle=\sum_{i=1}^{3}\left\langle\delta\hat{\mathbf{r}}_i\delta\hat{\mathbf{r}}_i^{\mathrm{T}}\right\rangle$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{ref}}=\left\langle\delta\hat{\mathbf{r}}_1\delta\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}\right\rangle+\left\langle\delta\hat{\mathbf{r}}_2\delta\hat{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}}\right\rangle+\left\langle\delta\hat{\mathbf{r}}_3\delta\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}}\right\rangle$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{ref}}&=\sigma_{\mathbf{v}_1}^2(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{r}}_3\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}-\hat{\mathbf{r}}_2\hat{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}})\\&+\frac{1}{|\hat{\mathbf{v}}_1\times\hat{\mathbf{v}}_2|^2}(\sigma_{\mathbf{v}_1}^2+\sigma_{\mathbf{v}_2}^2)(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}})+\sigma_{\mathbf{v}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{v}}_1\bullet\hat{\mathbf{v}}_2)}{|\hat{\mathbf{v}}_1\times\hat{\mathbf{v}}_2|}(\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{r}}_3\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{60}$$

Considerando o ângulo de referência o mesmo na observação, a Equação (60) torna-se:

$$\mathbf{P}_{\text{ref}} = \sigma_{\mathbf{v}_1}^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{r}}_3\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{r}}_2\hat{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}})$$
$$+\frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\sigma_{\mathbf{v}_1}^2+\sigma_{\mathbf{v}_2}^2)(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}) + \sigma_{\mathbf{v}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{r}}_3\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}) \quad (61)$$

Agora, fazendo os cálculos de $\mathbf{AP}_{\text{obs}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ das Equações (60) e considerando que $\hat{\mathbf{s}}_i = \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_i$ e $\hat{\mathbf{s}}_i^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{r}}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, isso resultará em:

$$\mathbf{AP}_{\text{ref}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathbf{v}_1}^2(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_3\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_2\hat{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$
$$+\frac{(\sigma_{\mathbf{v}_1}^2+\sigma_{\mathbf{v}_2}^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\mathbf{AA}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) + \sigma_{\mathbf{v}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_1\hat{\mathbf{r}}_3^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{r}}_3\hat{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{AP}_{\text{ref}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathbf{v}_1}^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}})$$
$$+\frac{(\sigma_{\mathbf{v}_1}^2+\sigma_{\mathbf{v}_2}^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) + \sigma_{\mathbf{v}_1}^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) \quad (62)$$

Considerando que $\sigma_1^2 = \sigma_{\mathbf{v}_1}^2 + \sigma_{\mathbf{w}_1}^2$ e $\sigma_2^2 = \sigma_{\mathbf{v}_2}^2 + \sigma_{\mathbf{w}_2}^2$ a covariância total é dada por $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{obs}} + \mathbf{AP}_{\text{ref}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, o qual resultará em:

$$\mathbf{P} = \sigma_1^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) + \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) +$$
$$+\sigma_1^2\frac{\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) \quad (63)$$

O traço da matriz $\mathbf{P}$ da Equação (63) será:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{P}) = 2\sigma_1^2 + \frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2} \quad (64)$$

Portanto, partindo da Equação (26), a matriz de covariância Cartesiana da atitude será:

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2 + \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2} - \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(\mathbf{I}-\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) + \sigma_1^2(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) \\ +\sigma_1^2\dfrac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2(\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) + \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} - \sigma_1^2\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} + \sigma_1^2(\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) - \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}})$$

Rearranjando alguns termos, a forma final da matriz de covariância Cartesiana da atitude é dada em termos dos vetores ortogonais de observação e a variância dos vetores de observação:

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \left[\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|^2} - \sigma_1^2\right]\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} + \sigma_1^2(\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}) - \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}) \quad (65)$$

A Equação (65) pode ser reescrita somente em termos dos vetores de observação $\hat{\mathbf{w}}_1$ e $\hat{\mathbf{w}}_2$. Considerando que:

$$\hat{\mathbf{s}}_1 = \hat{\mathbf{w}}_1$$

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{s}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2}{\left|\hat{\mathbf{s}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|} = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|} = \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\hat{\mathbf{w}}_2$$

$$\hat{\mathbf{s}}_3 = \hat{\mathbf{s}}_1\times\hat{\mathbf{s}}_2 = \hat{\mathbf{w}}_1\times\frac{\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|} = \Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\hat{\mathbf{s}}_2$$

Os termos que dependem de $\hat{\mathbf{s}}_i$ na Equação (65) podem ser escritos como:

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_1^T = \hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^T \quad (66)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_2\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}}) = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} \quad (67)$$

Os termos $\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^T$ tornam-se:

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{w}}_1(\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{w}}_1(\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\hat{\mathbf{s}}_2)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{w}}_1(\hat{\mathbf{s}}_2\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1))^{\mathrm{T}} = \hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{s}}_2^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1(\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1(\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\hat{\mathbf{w}}_2)^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^T = -\frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)\Omega(\hat{\mathbf{w}}_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}})$$

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3^{\mathrm{T}} = \frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} \quad (68)$$

E o termo $\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}}$, torna-se:

$$\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^{\mathrm{T}} = (\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_3)^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_3\hat{\mathbf{s}}_1^T = \frac{(\hat{\mathbf{w}}_1\bullet\hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1\times\hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} \quad (69)$$

Substituindo os termos das Equações (66) e (69) na Equação (65), $\mathbf{P}_{\theta\theta}$ se torna:

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_1^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} + \frac{\sigma_2^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - \sigma_1^2\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} + \sigma_1^2\mathbf{I} - \sigma_1^2\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}$$
$$-\sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|}\left(2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}}\right)$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2\mathbf{I} + \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) + \frac{\sigma_1^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}$$
$$+\frac{\sigma_2^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} - 2\sigma_1^2\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2} + \frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\right)$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2\mathbf{I} + \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) + \frac{\sigma_1^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} + \frac{\sigma_2^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2\mathbf{I} + \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) - \frac{\sigma_1^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}} + \frac{\sigma_2^2}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2\mathbf{I} + \sigma_1^2\frac{(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}(\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) + (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}$$

Rearranjando a Equação acima, finalmente, uma equação analítica para a matriz de covariância Cartesiana da atitude é dada em termos dos vetores de observação $\hat{\mathbf{w}}_1$ e $\hat{\mathbf{w}}_2$ em termos das variâncias $\sigma_1^2 = \sigma_{\mathbf{v}_1}^2 + \sigma_{\mathbf{w}_1}^2$ e $\sigma_2^2 = \sigma_{\mathbf{v}_2}^2 + \sigma_{\mathbf{w}_2}^2$. Assim, o resultado apresentado por Shuster e Oh é reescrito abaixo (SHUSTER; OH, 1981):

$$\mathbf{P}_{\theta\theta} = \sigma_1^2\mathbf{I} + \frac{1}{\left|\hat{\mathbf{w}}_1 \times \hat{\mathbf{w}}_2\right|^2}[\sigma_1^2(\hat{\mathbf{w}}_1 \bullet \hat{\mathbf{w}}_2)(\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_2^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{w}}_2\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}) + ($$
$$+(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)\hat{\mathbf{w}}_1\hat{\mathbf{w}}_1^{\mathrm{T}}] \qquad (70)$$

Conclusões

Um simples algoritmo de determinação de atitude, o TRIAD, e sua matriz de covariância são revisitados neste artigo. A matriz de covariância cartesiana da atitude é descrita em termos dos vetores de observação e dos vetores de referência. A álgebra de tensores e a estatística envolvida nos cálculos são apresentadas com pormenores, provendo uma introdução para o entendimento do problema da determinação da atitude.

O Algoritmo TRIAD e a matriz de covariância dependem somente dos valores dos vetores observados e da informação estatística destes vetores. Isso torna o algoritmo viável para implementação em sistemas de baixo custo e baixo poder de processamento, permitindo calcular a atitude e a covariância em altas taxas.

A disponibilidade de elementos de tecnologia MEMS, de baixo custo, abre uma ampla gama de aplicações na área de determinação de atitude. Aliados aos microcontroladores projetados para sistema embarcados, o resultado são sistemas de determinação de atitude miniaturizados que poderiam ser empregados tanto em aplicações comerciais quanto em satélites.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Agência Espacial Brasileira (AEB) pelo provimento de recursos necessários a este projeto. Este projeto é coordenado através do programa Uniespaço - AEB.

Referências

DUMAN, I. *Design, implementation and testing of a real-time software system for a quaternion-based attitude estimation filter*. 1999. Dissertation (Thesis of Naval Postgraduate School)- Naval Postgraduate School, Monterey.

GEBRE-EGZIABHER, D.; HAYWARD, R. C.; POWELL, J. D. Design of multi-sensor attitude determination systems. *IEEE*: Transactions On Aerospace and Electronic Systems, Piscataway, v.4, n.2, p.627-649, 2004.

KUIPERS, J. B. *Quaternions and rotation sequences*: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality. 5.ed. Princeton: Princeton University Press, 2002.

LEFFERTS, E. J.; MARKLEY, F. L.; SHUSTER, M. D.; Kalman filtering for spacecraft attitude estimation. *Journal of Guidance and Control*, Reston, v.5, n.5, p.417-429, 1982.

SHUSTER, M. D. In quest of better attitudes. *Advances in the Astronautical Sciences*, San Diego, v.108, p.2089-2117, 2001. Part.2.

SHUSTER, M. D.; OH, S. D. Three axis attitude determination from vector observations. *Journal of Guidance and Control*, Reston, v.4, n.1, p.70-77, 1981.

WAHBA, G. A least squares estimate of satellite attitude. *Siam Review*, Philadelphia, v.8, n.3, p.384-386, 1966.

WERTZ, R. D. *Spacecraft attitude determination and control*. Dordrecht: D. Reidel, 1978.