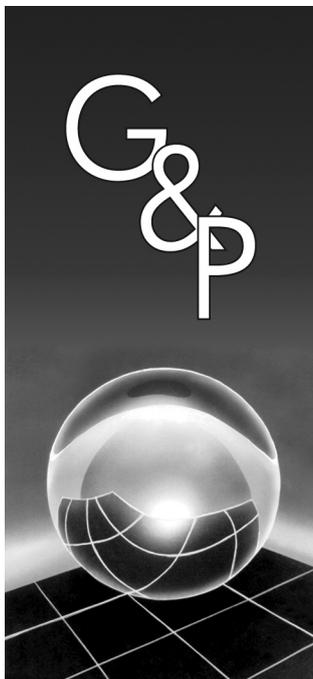


Novos limitantes lagrangeanos para o Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura utilizando grafos de cobertura

Francisco de Assis Corrêa
Luiz Antonio Nogueira Lorena
Glaydston Mattos Ribeiro



Resumo

O Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura (PPLAMC) consiste em localizar facilidades, maximizando a população atendida e fornecendo um bom nível de serviço para toda a população, ou seja, deve-se garantir que um usuário, ao chegar a um centro, não espere mais que um tempo máximo permitido ou não encontre uma fila de atendimento com um número de usuário maior que um valor máximo. Estes dois parâmetros dependem da taxa de chegada dos usuários e do atendimento, ambos probabilísticos. Devido às dificuldades intrínsecas do problema, neste artigo são discutidos limitantes lagrangeanos para o PPLAMC obtidos com a relaxação lagrangeana com clusters (LagClus). Na sua proposição inicial, a LagClus utilizou um grafo de conflitos, porém neste artigo esta relaxação foi aplicada em um grafo especial denominado grafo de cobertura.

Palavras-chave: Relaxação lagrangeana. Relaxação lagrangeana com clusters. Problemas de localização. Máxima cobertura.

1 Introdução

Os problemas de localização têm como objetivo localizar facilidades para atender aos usuários que estão espacialmente distribuídos. As facilidades são centros que fornecem algum tipo de serviço. Por exemplo, podem-se citar hospitais que fornecem serviços médicos a seus pacientes e bancos que gerenciam as contas de seus clientes.

Muitos desses problemas são combinatoriais e, mesmo com aplicativos sofisticados como o CPLEX (ILOG, <http://www.ilog.com>) e o XPRESS (DASH OPTIMIZATION, <http://www.dashoptimization.com>), soluções ótimas podem ser difíceis de serem encontradas. Portanto, muitos pesquisadores recorrem a heurísticas, metaheurísticas, métodos de decomposição e relaxações, para obter soluções primais de boa qualidade ou até mesmo limitantes duais interessantes que permitam avaliar soluções factíveis.

O Problema de Localização de Máxima Cobertura – PLMC tem sido consideravelmente tratado na literatura desde a sua formulação feita por Church e ReVelle (1974). Esse problema busca obter a configuração para localizar uma quantidade pré-definida de facilidades que atenda o maior número de indivíduos de uma população, considerada uma dada distância ou um tempo padrão do ponto de demanda. Não se busca com este modelo atender toda a população,

mas oferecer o máximo de atendimento, considerando os recursos disponíveis. A Figura 1 mostra três facilidades localizadas que atendem a vários pontos de demanda, porém, note que alguns pontos não estão cobertos pelos centros. Normalmente na literatura, um ponto é considerado coberto se ele está dentro de uma dada distância ou de um dado tempo da facilidade.

Vários modelos aplicados a uma grande faixa de problemas, nos setores público e privado, são extensões dessa formulação, adaptados para melhor representar a realidade. As aplicações variam de sistemas de emergência (EATON et al., 1986; CURRENT; O'KELLY, 1992), serviços hierárquicos de saúde (MOORE; REVELLE, 1982), controle de poluição do ar (HOUGLAND; STEPHENS, 1976), e sistemas congestionados (MARIANOV; SERRA, 1998; 2001). Os métodos de solução para o PLMC incluem relaxação de programação linear (CHURCH; REVELLE, 1974), heurísticas gulosas (DASKIN, 1995), relaxação lagrangeana (GALVÃO; REVELLE, 1996), heurística lagrangeana/surrogate (PEREIRA; LORENA, 2002), geração de colunas (PEREIRA et al., 2007), dentre outros. Considerável revisão deste tema pode ser encontrada em Chung (1986), Hale, Moberg (2003), Serra, Marianov (2004), Galvão (2004).

Em muitas aplicações práticas do PLMC, a distância ou o tempo entre os pontos de demanda e as facilidades constituem fatores importantes para estabelecer o nível de serviço oferecido aos usuários. Por outro lado, sabe-se que as chegadas dos usuários em sistemas de atendimento, como hospitais e bancos, são regidas por processos aleatórios e que, muitas vezes, proporcionam um congestionamento e a geração de filas (FOGLIATTI; MATTOS, 2007). Sistemas que apresentam tal comportamento indicam que o nível de serviço prestado aos usuários não pode ser medido apenas levando-se em consideração a distância ou o tempo entre os pontos de demanda e as facilidades, mas também os atributos de fila como o comprimento e o tempo de espera. Sendo assim, os centros devem ser localizados de tal maneira

que os usuários cheguem dentro de um tempo aceitável e também que, uma vez na fila, o comprimento desta não seja maior que um valor máximo e/ou o tempo de espera não seja maior que um limite máximo (MARIANOV; SERRA, 1998).

Os congestionamentos acontecem quando o centro não é capaz de atender a sua demanda. Modelos determinísticos do PLMC consideram capacidades limites para os centros, entretanto, a própria dinâmica de chegada dos usuários muitas vezes impossibilita o uso desses modelos. Além disso, os próprios atendentes nos centros possuem um processo de atendimento que não é constante, com isso, modelos determinísticos podem apresentar servidores com excesso de trabalho ou até mesmo ociosos, pois se

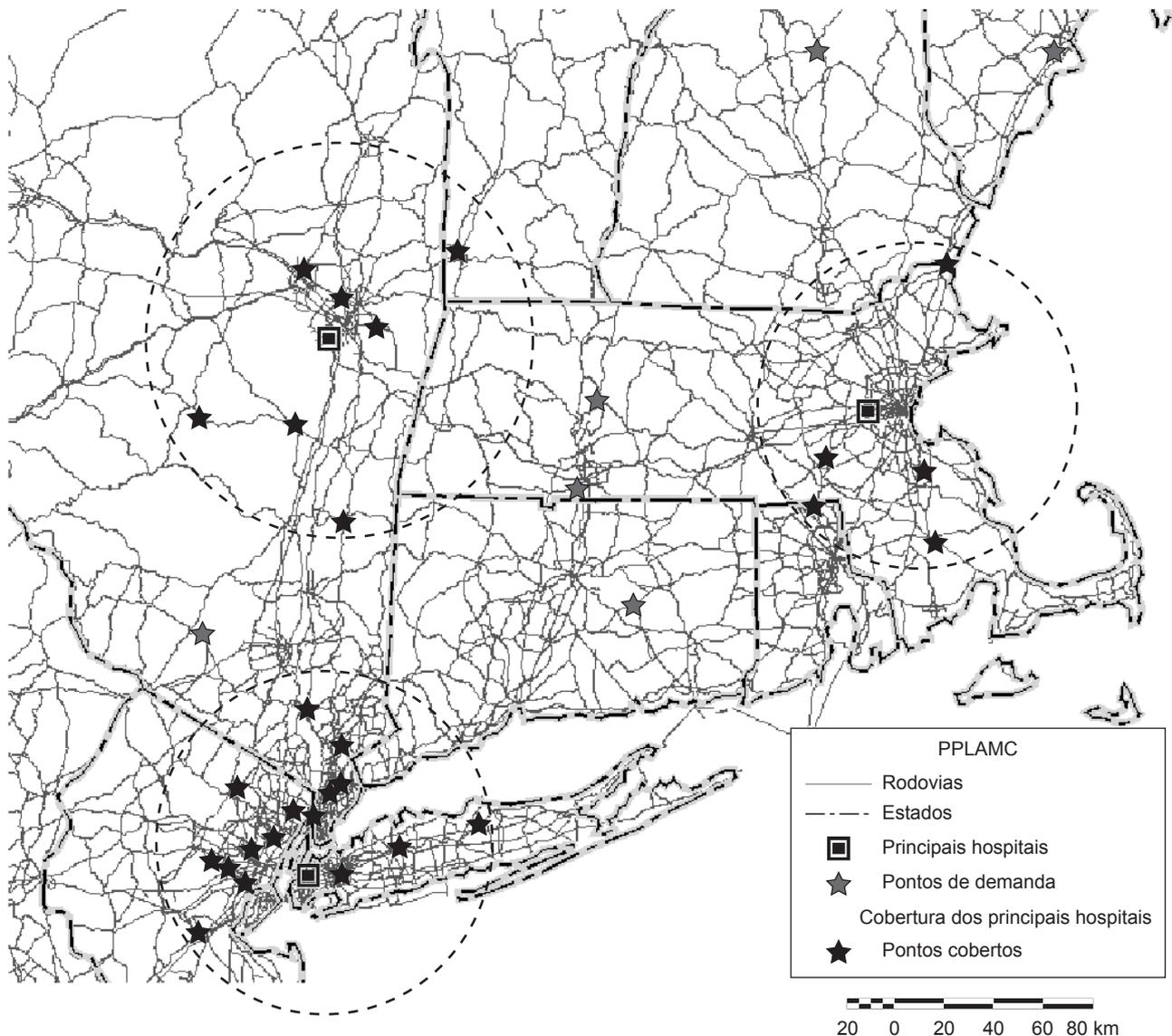


Figura 1. O Problema da Localização de Máxima Cobertura – PLMC.

considera um tempo de atendimento médio (MARIANOV; SERRA, 1998; 2001).

Considerando então essa aleatoriedade no processo de chegada e atendimento, Marianov e Serra (1998) propuseram modelos matemáticos em que a estocasticidade da demanda é explicitamente considerada nas restrições de capacidade, que, ao invés de serem limitadas a um máximo, têm um limite mínimo definido pelos autores para a qualidade dos seus serviços. Essa qualidade é refletida no tempo de espera e/ou na quantidade de pessoas que aguardam o atendimento.

Marianov e Serra (1998) definiram então o Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura (PPLAMC) que busca localizar uma dada quantidade de facilidades com um ou vários servidores, de modo que a população, a uma distância padrão do centro, seja servida adequadamente, isto é, que ninguém fique na fila por um período maior que um dado tempo limite, e que um usuário, ao chegar ao centro, não encontre um número de outros clientes acima do previsto, com probabilidade maior ou igual a dado valor definido *a priori*. Os autores trabalharam com postos de saúde, modelos de fila do tipo M/M/1/∞/FIFO e M/M/C/∞/FIFO (LARSON; ODoni, 1981) e taxas de chegadas a cada centro j distribuídas conforme uma Poisson com taxa λ_j e tempo de atendimento exponencialmente distribuído com taxa média μ_j para cada servidor.

Considerando a dificuldade embutida desses problemas, este artigo apresenta limitantes lagrangeanos para o PPLAMC. São apresentados limitantes lagrangeanos com a relaxação proposta por Corrêa, Lorena (2006), e segundo a Relaxação Lagrangeana com *Clusters* (LagClus) proposta por Ribeiro, Lorena (2007). A LagClus, inicialmente proposta, utiliza uma representação do problema por meio de um grafo de conflitos que é particionado em *clusters*. Em seguida, as arestas de conexão são relaxadas no sentido lagrangeano e os subproblemas podem ser então independentemente resolvidos. Neste artigo apresenta-se a LagClus sobre um grafo especial denominado grafo de cobertura. O particionamento deste grafo produz um número menor de restrições a serem relaxadas. Resultados computacionais mostram que a LagClus com o grafo cobertura apresenta bons limitantes.

O restante do artigo está distribuído como segue: na Seção 2 é apresentada a formulação tradicional do PPLAMC e a formulação proposta por Cornuéjols e Thizy (1982) da qual se visualiza o grafo de conflitos; na Seção 3 são apresentados os principais passos da LagClus e como os grafos de conflitos e de cobertura, bem como os seus particionamentos, podem ser obtidos; na Seção 4 são apresentados os resultados computacionais obtidos neste

artigo; e por último, a Seção 5 apresenta as principais conclusões e recomendações do trabalho.

2 Formulações para o problema probabilístico de localização-alocação de máxima cobertura

O modelo tradicional PLMC proposto por Church e ReVelle (1974) não pode ser usado para tratar as restrições de congestionamento, pois não contém variáveis de alocação, o que impede de computar as solicitações de serviços que chegam a um centro, e, conseqüentemente, de determinar quando ocorre um congestionamento.

A modelagem matemática proposta para PPLAMC foi escrita como um problema tipo p -medianas (LORENA, 2003), modificado para comportar as variáveis de localização e alocação, tendo como objetivo maximizar a população coberta, considerando uma determinada quantidade de centros de atendimento (facilidades).

Seja I o conjunto dos pontos de demanda a serem alocados e N_i o conjunto de localizações candidatas que estão dentro de uma dada distância do ponto i . Formalmente, as alocações são representadas pelas variáveis binárias x_{ij} , $\forall i \in I$ e $j \in N_i$. Com isso, $x_{ij} = 1$, se o ponto de demanda i for alocado ao centro j , $x_{ij} = 0$, caso contrário. As localizações são representadas pelas variáveis binárias y_j , com $y_j = 1$, se o centro j for selecionado e $y_j = 0$, caso contrário. Todo ponto de demanda é um potencial centro de atendimento.

Assim, a formulação do PPLAMC pode ser escrita como (MARIANOV; SERRA, 1998):

$$v(PPLAMC) = \text{MAX} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_i x_{ij} \right\} \quad (1)$$

(PPLAMC) Sujeito a:

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (2)$$

$$\sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \mu_j^{b+2} \sqrt{1 - \alpha_f} \quad \forall j \quad (4a)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq \mu_j + \frac{1}{\tau} \ln(1 - \alpha_f) \quad \forall j \quad (4b)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p \quad (5)$$

$$y_j \text{ e } x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (6)$$

em que:

- a_i representa a população total do ponto de demanda i ;
- b é o número máximo de usuários na fila com probabilidade de, no mínimo, α_f ;
- τ é o tempo máximo de espera na fila com probabilidade de, no mínimo, α_f ;
- f_i é a taxa de chegadas dos usuários conforme um processo de Poisson;
- μ_j é a taxa média de atendimento em que o tempo de atendimento está exponencialmente distribuído; e
- p é o número de facilidades a serem localizadas.

A função objetivo descrita em (1) indica que a população total coberta pelos p centros deve ser a maior possível. As restrições definidas em (2) garantem que só é possível alocar um ponto de demanda i a um centro j se houver um centro em j . As restrições descritas em (3) garantem que cada ponto de demanda deve ser alocado a, no máximo, um centro.

As restrições descritas em (4a) e (4b) estão associadas à questão do comprimento máximo da fila e ao tempo máximo de atendimento, respectivamente. Utiliza-se uma delas, dependendo da restrição que se quer tratar. As definidas por (4a) garantem que, com probabilidade α_f , cada centro tenha no máximo b pessoas na fila, por outro lado, as definidas em (4b) garantem que, com probabilidade α_f , o tempo de atendimento em cada centro seja de no máximo τ . A restrição definida em (5) garante que p centros serão selecionados, e as restrições descritas em (6) garantem que todas as variáveis são binárias.

As restrições descritas em (4a) e (4b) foram definidas por Marianov e Serra (1998) para o modelo de fila M/M/1/∞/FIFO, ou seja, os intervalos entre chegadas são exponenciais, o tempo de atendimento é exponencial, com 1 servidor, sem limite de capacidade e disciplina de fila do tipo “o primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido” (*first in – first out*).

Usuários chegam a um centro j provenientes de um ponto de demanda i com uma taxa de chegada f_i . Como em um centro j , os usuários podem vir de vários pontos de demanda i , faz-se necessário levantar a taxa de chegada geral ao centro j . Dessa maneira, considerando que as chegadas dos usuários de todos os pontos de demanda i acontecem de maneira superposta, sem perda de generalidade, a taxa de chegada ao centro j pode ser assim definida (MARIANOV; SERRA, 1998; CORRÊA; LORENA; 2006): $\lambda_j = \sum_{i \in I} f_i x_{ij}$.

Para que se tenha equilíbrio no processo de atendimento dos centros, faz-se necessário que $\mu_j \geq \lambda_j$ (FOGLIATTI; MATTOS, 2007).

Como indicam Marianov e Serra (1998), Corrêa e Lorena (2006), o lado direito das equações (4a) e (4b) são constantes, calculados para μ_j , α_f , b e τ , definidos *a priori*. Simplificando, essas restrições podem ser substituídas, respectivamente, pelos dois conjuntos de restrições a seguir, em que $K_{\mu b \alpha_f}^j = \mu_j^{b+2} \sqrt{1-\alpha_f}$ e $K_{\mu \tau \alpha_f}^j = \mu_j + \frac{1}{\tau} \ln(1-\alpha_f)$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq K_{\mu b \alpha_f}^j \quad \forall j \quad (7a)$$

$$\sum_{i \in I} f_i x_{ij} \leq K_{\mu \tau \alpha_f}^j \quad \forall j \quad (7b)$$

Considerando as instâncias de grande porte (324 e 818 pontos de demanda) propostas por Corrêa e Lorena (2006) e Corrêa et al. (2006a) disponíveis em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html>, o CPLEX 10 (ILOG, 2006), com a formulação mostrada acima, não consegue resolver todas as instâncias, parando várias vezes por falta de memória. Consequentemente buscaram-se relaxações lagrangeanas que pudessem fornecer limitantes duais.

O modelo proposto por Marianov e Serra (1998) descrito anteriormente pode ser alterado para comportar restrições de adjacência ou de conflitos. Uma restrição de conflito garante que no máximo uma variável receberá o valor 1 (ATAMTÜRK et al., 2000). Considerando então o complemento das variáveis de localização, ou seja, $\bar{y}_j = 1 - y_j$, conforme indicado por Cornuéjols e Thizy (1982), o seguinte modelo pode ser escrito:

$$v(\overline{PPLAMC}) = \text{MAX} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in N_i} a_i x_{ij} \right. \quad (8)$$

(\overline{PPLAMC}) Sujeito a (3), (6) e (7a) ou (7b),

$$x_{ij} + \bar{y}_j \leq 1 \quad \forall i \in I \text{ e } j \in N_i \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I} \bar{y}_i = |N| - p \quad (10)$$

em que $N = \cup_{i \in I} N_i$.

Com esse modelo, é possível construir o grafo de conflitos para a LagClus.

3 Relaxação lagrangeana com clusters a partir de grafos de conflitos e de cobertura

O conjunto de restrições de adjacências descrito em (3) e em (9) permite explorar LagClus que vem se mostrando forte para alguns problemas de otimização: Carregamento de Paletes (RIBEIRO; LORENA, 2007), Rotulação Cartográfica (RIBEIRO; LORENA, 2008b), Estivagem de Unidades de Celulose (RIBEIRO; LORENA, 2008a),

Problema de Localização de Facilidades Não Capacitado (CORRÊA et al, 2006b).

A idéia da LagClus consiste em dividir o problema original em pequenos subproblemas (*clusters*) que podem ser independentemente resolvidos, e relaxar, no sentido lagrangeano, as restrições que se apresentam nas interligações dos *clusters*.

Ribeiro, Lorena (2007; 2008a; 2008b) vêm aplicando a LagClus a partir da representação do problema por meio de grafos de conflitos. Segundo Atamtürk et al. (2000), um grafo de conflitos representa uma relação lógica entre variáveis binárias. Existe um vértice para cada variável binária e uma aresta (restrição de conflito) entre dois vértices quando no máximo uma das variáveis representadas pode receber o valor um. Agora note que as restrições apresentadas em (3) e (9) são restrições de conflito. Consequentemente um grafo de conflitos pode ser obtido para o PPLAMC, e a LagClus pode ser então aplicada.

Ribeiro, Lorena (2007) definem alguns passos para se usar a LagClus:

- Montar o grafo de conflitos $G = (V,A)$ do problema;
- Aplicar uma heurística de particionamento para dividir o grafo G em Q *clusters* com aproximadamente a mesma cardinalidade, obtendo-se um Q -particionamento. O problema passa a ser então representado por meio de sua função objetivo, sujeita às restrições de adjacências (arestas) divididas em dois conjuntos: um com restrições de adjacência intra-*clusters*; e outro com restrições de adjacência entre-*clusters* ou arestas de ligação;

- Relaxar, no sentido lagrangeano, as restrições de adjacências entre-*clusters*; e
- Decompor a relaxação lagrangeana resultante em Q subproblemas e resolvê-la por meio de um algoritmo de subgradientes.

A seguir, é apresentado como o grafo de conflitos pode ser obtido para o PPLAMC bem como o grafo de cobertura.

3.1 Grafo de conflitos para o problema probabilístico de localização-alocação de máxima cobertura

Considere os dados da Tabela 1 que indicam quatro pontos de demanda com suas respectivas coordenadas de localização. Admitindo que cada ponto de demanda possa ser um centro e que um ponto de demanda j está coberto por um centro i se este estiver a uma distância euclidiana menor ou igual a 4, a coluna Pontos Cobertos apresenta os pontos de demanda cobertos por cada um dos possíveis centros. Levando-se em consideração o segundo modelo mostrado para o PPLAMC, as restrições definidas em (3) e (9) devem ser escritas e um grafo de conflitos pode ser gerado, veja Figura 2.

Considerando agora o segundo passo da LagClus, suponha que o grafo de conflitos tenha sido particionado em 2 *clusters* conforme mostra a Figura 2. Nessa figura, as linhas mais espessas mostradas à direita indicam quais restrições devem ser relaxadas (neste exemplo, restrições definidas conforme (9)).

Ao considerar o PPLAMC e o particionamento mostrado na Figura 2, além das restrições de conflitos já identificadas previamente para serem relaxadas, algumas restrições do tipo (7a) ou (7b) e a restrição (10) também devem ser

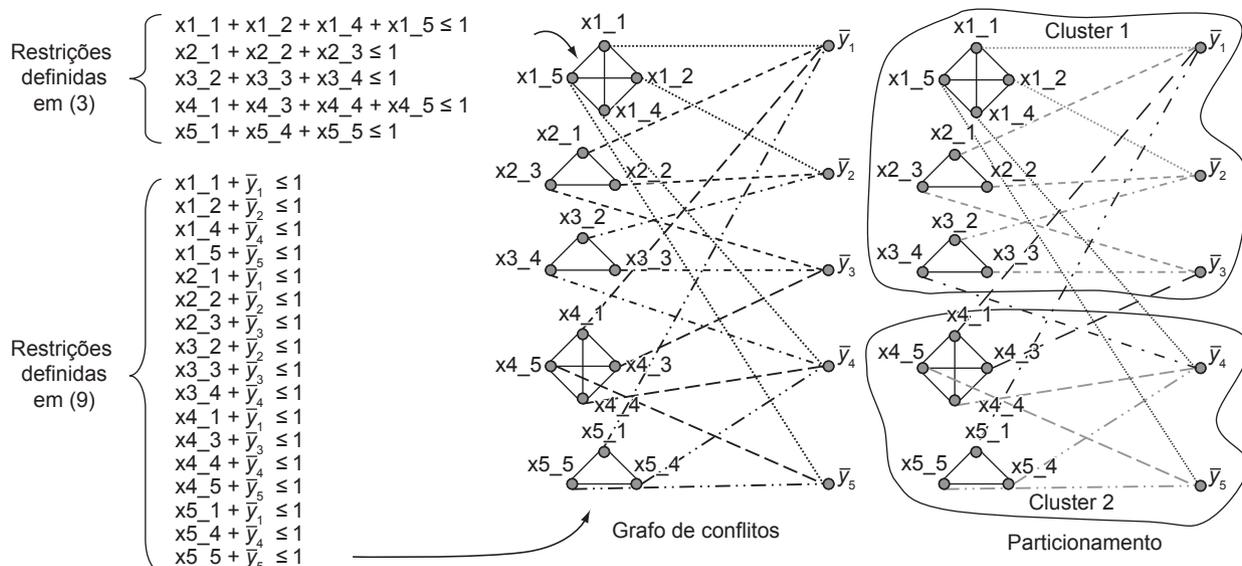


Figura 2. Exemplo de um grafo de conflitos.

relaxadas do PPLMAC. Ao escrever o modelo matemático todo para o exemplo, percebe-se que 11 restrições são relaxadas: 6 estão mostradas Figura 2, 4 são restrições do tipo (7a) ou 7(b) e a restrição (10).

Resultados computacionais mostraram que a decomposição do grafo de conflitos do PPLMAC em *clusters*, relaxa muitas restrições o que gera limitantes duais de baixa qualidade. Isso motivou o estudo do particionamento dos grafos de cobertura ao invés dos grafos de conflitos. O grafo de cobertura é obtido a partir da primeira formulação do PPLMAC proposta por Marianov, Serra (1998).

3.2 Grafo de cobertura para o problema probabilístico de localização-alocação de máxima cobertura

Um grafo de cobertura $G = (V,A)$ apresenta um conjunto V de vértices formados pelos locais candidatos e um conjunto de A de arestas que indica a cobertura de cada ponto de demanda. Esse grafo também apresenta *clusters* de vértices, logo a LagClus pode ser aplicada.

Para demonstrar como obtê-lo, considere novamente os dados da Tabela 1. A partir dos dados apresentados, sabe-se que os conjuntos de localizações candidatas de cada ponto são: $N_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{2, 3, 4\}$, $N_4 = \{1, 3, 4, 5\}$ e $N_5 = \{1, 4, 5\}$. Sendo assim, a Figura 3 apresenta a cobertura de todos os pontos e por fim, o grafo de cobertura do problema.

Particionando o grafo de cobertura em dois *clusters* como realizado na Figura 2, ou seja, y_1, y_2 e y_3 no *Cluster 1* e y_4 e y_5 no *Cluster 2* (Veja Figura 3), e considerando a formulação de Marianov e Serra (1998), as seguintes restrições devem ser relaxadas: $x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,4} + x_{1,5} \leq I$, $x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq I$, $x_{4,1} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} \leq I$ e $x_{5,1} + x_{5,4} + x_{5,5} \leq I$, além da restrição (5). Isso resulta em apenas cinco restrições relaxadas.

Para comparar o número de restrições relaxadas por cada um dos métodos, grafos de conflitos e de cobertura foram obtidos para três conjuntos de instâncias propostos na literatura. O primeiro (C_1) foi proposto por Marianov e Serra (1998) e contém problemas com 30 pontos, o segundo e o terceiro (C_2 e C_3) foram propostos por Corrêa e Lorena (2006) e Corrêa et al. (2007) e possuem, respectivamente, 324 e 818 pontos. O particionamento do grafo foi realizado pela heurística METIS (KARYPIS;

KUMAR, 1998) que é uma heurística bem conhecida para particionamento de grafos. O METIS busca particionar o grafo reduzindo o número de restrições com vértices em diferentes *clusters* e mantendo aproximadamente *clusters* de mesmo tamanho. Os experimentos foram realizados variando-se o número de *clusters* para uma melhor comparação. Os resultados estão mostrados na Tabela 2.

Analisando a Tabela 2, note que o particionamento do grafo de conflitos particiona um número menor de arestas que o particionamento do grafo de cobertura. Por outro lado, o número de restrições relaxadas no modelo com restrições de conflitos (\overline{PPLMAC}) é maior que o do outro modelo. Ao considerar os valores médios, o modelo \overline{PPLMAC} relaxa aproximadamente 30 vezes mais restrições que o modelo $PPLMAC$. Esse comportamento justifica o uso da LagClus com o grafo de cobertura e a formulação original de Marianov e Serra (1998).

Considerando o particionamento do grafo de cobertura $G = (V,E)$ em Q partes com vértices V_1, V_2, \dots, V_Q , subgrafos $G_q = G[V_q]$ podem ser definidos bem como suas arestas $E_q = E(G_q)$. Com isso, as arestas que conectam os subgrafos, ou seja, as arestas particionadas, podem ser definidas como $\hat{E} = E \setminus \bigcup_{q=1}^Q E_q$. Desse modo, após a fase de particionamento, a formulação do $PPLMAC$ pode ser novamente escrita (Equação 11):

$$v(PPLMAC) = \text{MAX} \sum_{q=1}^Q a^q x^q \tag{11}$$

($PPLMAC$) Sujeito a (Equações 12, 13 e 13a):

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^1 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^2 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^Q \end{pmatrix} \sim b \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_Q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^1 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^2 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^Q \end{pmatrix} \sim b \tag{13}$$

Tabela 1. Exemplo de um problema de máxima cobertura com raio de cobertura igual a 4.

Pontos de Demanda	X	Y	Pontos Cobertos
1	4	8	1, 2, 4, 5
2	7	10	1, 2, 3
3	8	7	2, 3, 4
4	5	5	1, 3, 4, 5
5	2	6	1, 4, 5

$$\mathbf{x}^q, \mathbf{y}^q \in B^{|V_q|} \forall q \in \{1, \dots, Q\} \quad (13a)$$

em que:

- A_q é uma matriz de coeficientes das restrições definidas em (3) associadas com as arestas \hat{E} , e da restrição definida em (5);
- B_q é uma matriz de coeficientes das restrições definidas em (2), (4a), (4b) e das restrições definidas em (3) associadas às arestas de E_q ;
- \sim representa o operador relacional $=$ ou \leq dependendo da respectiva restrição; e
- \mathbf{b} é um vetor com os termos do lado direito das respectivas restrições.

Agora, relaxando no sentido lagrangeano as restrições de acoplamento dos blocos, ou seja, as restrições definidas

em (12), cada subproblema q pode ser assim escrito (Equação 14):

$$v(PPLAMC)_q^{LG} = \text{Max} \left\{ \left(a^q - A_q^T \alpha \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^q : x^q, y^q \in C_q \right\} \quad (14)$$

em que α é um vetor de multiplicadores lagrangeanos relacionados às restrições definidas em (12), e C_q representa o conjunto de restrições embutido no *cluster* q , ou seja, o bloco q das restrições definidas em (13).

Se α é um vetor de dimensão K em que $\alpha_k \in \mathfrak{R}^+ \forall k = 1, \dots, K-1$ e $\alpha_k \in \mathfrak{R}$ tal que K é o número de restrições de acoplamentos definidas em (12), o limitante lagrangeano pode ser assim escrito (Equação 15):

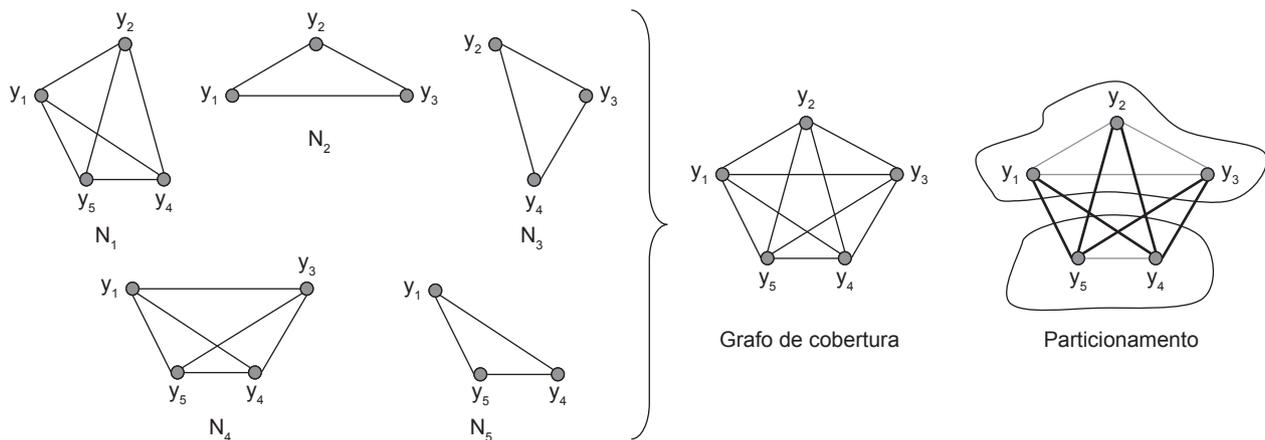


Figura 3. Exemplo de um grafo de cobertura.

Tabela 2. Número de restrições relaxadas na LagClus usando grafos de conflitos e de cobertura.

Conjunto*	Nº de pontos demanda	Nº de Clusters	Total de arestas particionadas no grafo de conflitos	Total de arestas particionadas no grafo de cobertura	Total de restrições relaxadas pelo modelo	Total de restrições relaxadas pelo modelo PPLAMC
					PPLAMC	
C ₁	30	2	108	155	133	24
		4	224	261	253	30
		8	332	307	362	30
C ₂	324	5	361	1034	483	114
		10	742	2238	925	238
		20	1469	4186	1752	311
		30	2123	4364	2434	314
C ₃	818	5	11411	34457	11914	487
		10	21468	57579	22186	716
		20	36083	71157	36879	819
		30	42812	76283	43629	818
		Média	10648,45	22911,00	10995,45	354,64

*Instâncias disponível em <http://www.lac.inpe.br/~lorena/instancias.html>.

$$v(PPLAMC^{LG}) = \sum_{q=1}^Q \left\{ v(PPLAMC)_q^{LG} \right\} + \sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k + p\alpha_K \quad (15)$$

3.3 Experimentos computacionais

Para os experimentos computacionais, como citado anteriormente, foram utilizadas as instâncias propostas por Marianov, Serra (1998), Corrêa, Lorena (2006a), Corrêa et al. (2007). Para uma melhor descrição bem como suas principais características, veja Corrêa e Lorena (2006a) e Corrêa et al. (2007). Para comparar os limitantes lagrangeanos obtidos com a LagClus, o CPLEX 10 (ILOG, 2006) foi utilizado. Todos os experimentos foram limitados em 3 horas de processamento.

Um algoritmo de subgradientes adaptado para a LagClus foi implementado conforme Parker e Rardin (1988), Narciso, Lorena (1999), Wolsey (1998). Os subproblemas da LagClus foram resolvidos usando o CPLEX 10 e, para o cálculo do passo, foram utilizadas as melhores soluções encontradas na literatura disponíveis nos trabalhos de Corrêa e Lorena (2006a) e Corrêa et al. (2007). O uso dessas melhores soluções se justifica uma vez que o objetivo deste trabalho é investigar os limitantes duais. Além disso, a relaxação Lagrangeana proposta por Corrêa e Lorena (2006a) foi implementada para comparação dos limitantes. Essa relaxação é aplicada nas restrições definidas em (3). O limitante de programação linear também foi calculado usando o CPLEX 10. Por último, todos os experimentos foram realizados em computador equipado com um Pentium IV 3.0 GHz com 1.0 GB de memória RAM.

As Tabelas 3, 4 e 5 apresentam os resultados encontrados neste artigo. A primeira coluna dessas tabelas apresenta o nome da instância que indica os valores de cinco parâmetros, sendo eles: tamanho da instância, p , b , μ , φ e τ : Por exemplo, a instância 324_20_0_2_95 indica que são 324 pontos, 20 centros (facilidades), que a fila está restringida por tamanho (se o parâmetro fosse 1 a fila estaria restringida pelo tempo), que existe um máximo de duas pessoas na fila com probabilidade de pelo menos 95%. A coluna *gap* nessas tabelas é calculada da seguinte maneira:

$$GAP(\%) = \frac{(\text{limitante superior} - \text{limitante inferior})}{\text{limitante inferior}} \times 100.$$

Em todas estas tabelas, nota-se que os limitantes de programação linear são altos se comparados com os do CPLEX, da Relaxação Lagrangeana de Corrêa e Lorena (2006a) e os da LagClus. As linhas em negrito indicam soluções ótimas encontradas pelos métodos.

Considere a Tabela 3. Para as instâncias apresentadas nessa tabela, o CPLEX apresenta bons resultados, resolvendo otimamente várias instâncias. A relaxação de programação linear apresenta um tempo computacional baixo, porém o

gap é maior. Analisando as relaxações, percebe-se que a Relaxação Lagrangeana de Corrêa e Lorena (2006a) encontra várias soluções ótimas, enquanto a LagClus encontra apenas uma. Entretanto, ao se comparar os *gaps* médios, percebe-se que a LagClus apresenta um *gap* menor.

Considerando a Tabela 4, percebe-se que a Relaxação Lagrangeana de Corrêa e Lorena (2006a) não encontra nenhuma solução ótima e apresenta um *gap* médio maior que o do CPLEX e o da LagClus. Comparando agora o CPLEX e a LagClus, percebe-se que ambos resolveram de forma ótima 14 instâncias e que apresentam *gaps* e tempos computacionais médios da mesma ordem de grandeza.

Por último, a Tabela 5 apresenta os resultados para as instâncias de grande porte com 818 pontos. Observe que o *gap* médio da relaxação de programação linear é significativo, maior que 800%. Por outro lado, a relaxação lagrangeana de Corrêa e Lorena (2006a) para essas instâncias não conseguiu executar a primeira iteração do algoritmo de subgradientes após 3 horas de processamento, Consequentemente nenhum *gap* pôde ser calculado. Analisando agora os resultados da LagClus, percebe-se que o tempo computacional médio utilizado por ela é comparável ao do CPLEX, além disso, a LagClus apresenta um *gap* médio menor que o do CPLEX e a LagClus resolveu otimamente a instância 818_20_1_41_85 não resolvida pelo CPLEX.

4 Conclusões

Este trabalho apresentou novos limitantes lagrangeanos para o Problema Probabilístico de Localização-Alocação de Máxima Cobertura (PPLAMC) obtidos com uma relaxação lagrangeana com *clusters* (LagClus) aplicada após a representação do PPLAMC por meio de um grafo de cobertura. A LagClus tem se mostrado mais forte que as relaxações tradicionais e esse comportamento novamente foi encontrado para o PPLAMC.

Para instâncias de grande porte, com 818 pontos, a LagClus apresentou *gaps* menores que o CPLEX 10 em um tempo computacional médio semelhante. Além disso, a relaxação lagrangeana de Corrêa e Lorena (2006a) não apresentou limitantes para esses problemas.

Conforme indicam Ribeiro e Lorena (2007; 2008b), a decomposição do problema por meio de *clusters* permite a utilização da decomposição de Dantzig-Wolfe e, conseqüentemente, pode-se aplicar um algoritmo de geração de colunas (AGC). Os autores ainda indicam que o AGC apresenta resultados melhores que a LagClus, adicionando poucas colunas no problema mestre restrito. Atualmente encontra-se em desenvolvimento um AGC para o PPLAMC e resultados preliminares mostraram que os resultados da LagClus podem ser melhorados. Acredita-se que em breve novos limitantes duais e soluções primais sejam encontradas para o PPLAMC.

Tabela 3. Resultados computacionais para as instâncias com 30 pontos e $Q = 2$ clusters.

Instância	CPLEX 10			Relaxação de programação linear			Relaxação lagrangeana (Corrêa; Lorena, 2006)			LagClus				
	Limitante Inferior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)
30_2_0_0_85	3700	0,000	0,22	5310,90	43,540	0,03	3700	3700	0,000	5	3700,00	3700,50	0,010	85,20
30_3_0_0_85	5390	0,000	0,12	5430,00	0,740	0,02	5390	5517	2,360	109	5390,00	5397,44	0,140	228,20
30_2_0_1_85	5100	0,000	3,31	5315,00	4,220	0,02	5060	5100	0,790	23	5100,00	5182,77	1,620	323,20
30_3_0_1_85	5390	0,000	0,08	5430,00	0,740	0,02	5390	5431	0,770	33	5390,00	5431,39	0,770	41,20
30_2_0_2_85	5210	0,000	0,20	5317,60	2,070	0,02	5210	5279	1,330	32	5210,00	5278,88	1,320	109,00
30_3_0_2_85	5390	0,000	0,12	5430,00	0,740	0,02	5390	5430	0,770	33	5390,00	5430,13	0,740	10,80
30_5_0_0_95	5330	0,380	10800,00	5470,00	2,630	0,02	5330	5350	0,380	50	5330,00	5395,03	1,220	912,80
30_6_0_0_95	5410	1,110	10800,00	5470,00	1,110	0,02	5410	5468	1,070	31	5410,00	5470,00	1,110	397,80
30_3_0_1_95	5270	0,000	116,00	5430,00	3,040	0,03	5260	5280	0,380	170	5270,00	5377,98	2,050	218,90
30_4_0_1_95	5390	0,000	3,77	5470,00	1,480	0,02	5390	5467	1,440	31	5390,00	5467,40	1,440	99,00
30_2_0_2_95	4520	0,000	2,11	5313,40	17,550	0,02	4520	4520	0,000	1	4520,00	4660,16	3,100	213,80
30_3_0_2_95	5390	0,000	0,12	5430,00	0,740	0,02	5390	5425	0,650	32	5390,00	5424,90	0,650	68,10
30_4_1_48_90	1920	0,000	0,41	5470,00	184,900	0,03	1920	1920	0,000	0	1920,00	1920,96	0,050	13,20
30_5_1_48_90	2400	0,000	0,41	5470,00	127,920	0,03	2400	2400	0,000	2	2400,00	2400,84	0,040	158,50
30_3_1_49_90	2160	0,000	0,31	5421,50	150,990	0,03	2150	2160	0,470	20	2160,00	2160,62	0,030	7,80
30_4_1_49_90	2880	0,000	0,41	5470,00	89,930	0,02	2870	2880	0,350	21	2880,00	2880,84	0,030	59,90
30_5_1_50_90	4700	0,000	4,09	5470,00	16,380	0,00	4700	4700	0,000	8	4700,00	4701,00	0,020	1121,40
30_6_1_50_90	5390	0,000	350,52	5470,00	1,480	0,02	5390	5613	4,130	45	5390,00	5417,02	0,500	678,20
30_5_1_40_85	3050	0,000	3,66	5470,00	79,340	0,02	3000	3050	1,670	23	3050,00	3050,99	0,030	583,00
30_6_1_40_85	3610	0,000	31,62	5470,00	51,520	0,02	3610	3650	1,120	33	3610,00	3647,57	1,040	1962,12
30_7_1_40_85	4060	0,000	16,89	5470,00	34,730	0,02	4060	4195	3,340	33	4060,00	4118,07	1,430	897,80
30_6_1_41_85	5330	0,190	10800,00	5470,00	2,630	0,00	5330	5340	0,190	34	5330,00	5388,51	1,100	939,00
30_7_1_41_85	5410	0,000	43,56	5470,00	1,110	0,00	5410	5470	1,190	31	5410,00	5470,00	1,110	375,70
30_8_1_41_85	5470	0,000	0,05	5470,00	0,000	0,00	5470	5470	0,000	16	5470,00	5470,00	0,000	0,00
30_4_1_42_85	4600	0,000	0,75	5470,00	18,910	0,02	4600	4600	0,000	1	4600,00	4600,98	0,020	1271,70
30_5_1_42_85	5390	0,000	6,50	5470,00	1,480	0,02	5390	5670	5,200	65	5390,00	5420,13	0,560	414,80
Média	4533	0,065	1268,66	5436,48	32,305	0,02	4528,46	4580,19	1,060	33,92	4533,08	4571,70	0,774	430,43

Tabela 4. Resultados computacionais para as instâncias com 324 pontos e Q = 10 clusters.

Instância	CPLEX 10				Relaxação de programação linear				Relaxação lagrangeana (Corréa; Lorena, 2006)				LagClus				
	Limitante Inferior	GAP (%)	Tempo (s)	Tempo (s)	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)
	324_10_0_0_95	21460	0,000	67,4	0,25	124446,0	479,90	21351	21460	0,51	3466	21460,4	0,000	27,7	21460,0	21460,4	0,000
324_10_0_1_95	35360	0,000	242,1	0,22	128311,6	262,87	35292	35360	0,19	4671	35360,5	0,000	456,6	35360,0	35360,5	0,000	456,6
324_10_0_2_95	45390	0,000	305,3	0,16	129688,0	185,72	45183	45390	0,46	1468	45390,8	0,000	30,7	45390,0	45390,8	0,000	30,7
324_10_0_0_85	37180	0,000	481,0	0,19	128624,9	245,95	36928	37180	0,68	5554	37180,7	0,000	23,2	37180,0	37180,7	0,000	23,2
324_10_0_1_85	51000	0,000	297,3	0,14	130136,3	155,17	50562	51000	0,87	1042	51000,1	0,000	4755,8	51000,0	51000,1	0,000	4755,8
324_10_0_2_85	59740	0,000	961,1	0,13	130695,0	118,77	59277	59740	0,78	930	59740,6	0,000	2311,7	59740,0	59740,6	0,000	2311,7
324_10_1_40_85	27700	0,000	292,1	0,25	126583,5	356,98	27560	27700	0,51	5125	27700,6	0,000	26,9	27700,0	27700,6	0,000	26,9
324_10_1_41_85	29360	0,000	216,5	0,17	127049,3	332,73	29137	29360	0,77	5655	29360,9	0,000	25,1	29360,0	29360,9	0,000	25,1
324_10_1_42_85	30950	0,000	1074,1	0,20	127428,1	311,72	30866	30950	0,27	5665	30950,5	0,000	28,3	30950,0	30950,5	0,000	28,3
324_10_1_48_90	26920	0,000	421,6	0,22	126357,7	369,38	26799	26920	0,45	5219	26920,8	0,000	26,8	26920,0	26920,8	0,000	26,8
324_10_1_49_90	28330	0,000	359,1	0,20	126761,9	347,45	28210	28330	0,46	5159	28330,6	0,000	26,8	28330,0	28330,6	0,000	26,8
324_10_1_50_90	29680	0,000	529,9	0,22	127126,2	328,32	29585	29680	0,32	6508	29680,5	0,000	26,7	29680,0	29680,5	0,000	26,7
324_20_0_0_95	42920	0,021	9672,3	0,20	195213,5	354,83	41998	42920	2,20	2660	42920,3	0,040	10800,0	42920,0	42920,3	0,040	10800,0
324_20_0_1_95	70720	0,000	9911,9	0,22	197056,3	178,64	70340	70720	0,54	4391	70720,5	0,000	8737,0	70720,0	70720,5	0,000	8737,0
324_20_0_2_95	90778	0,003	10800,0	0,74	197611,6	117,69	89488	90780	1,44	2156	90778,0	0,020	10800,0	90778,0	90793,9	0,020	10800,0
324_20_0_0_85	74315	0,061	4791,9	0,22	197198,7	165,36	73047	74360	1,80	2143	74315,0	0,140	10800,0	74315,0	74422,6	0,140	10800,0
324_20_0_1_85	101928	0,071	10800,0	0,74	197727,2	93,99	99569	102000	2,44	2088	101928,0	0,270	10800,0	101928,0	102202,9	0,270	10800,0
324_20_0_2_85	119445	0,030	10800,0	0,74	197799,8	65,60	116905	119480	2,20	2320	119445,0	0,750	10800,0	119445,0	120339,8	0,750	10800,0
324_20_1_40_85	55397	0,005	10800,0	0,25	196328,2	254,40	54512	55400	1,63	3216	55397,0	0,080	10800,0	55397,0	55441,6	0,080	10800,0
324_20_1_41_85	58720	0,000	828,9	0,22	196504,9	234,65	57841	58720	1,52	4190	58720,0	0,050	10800,0	58720,0	58749,4	0,050	10800,0
324_20_1_42_85	61900	0,002	10800,0	0,22	196661,9	217,71	60635	61900	2,09	4726	61900,0	0,000	5844,8	61900,0	61900,8	0,000	5844,8
324_20_1_48_90	53839	0,002	10800,0	0,22	196241,5	264,50	53067	53840	1,46	3284	53839,0	0,120	10800,0	53839,0	53905,3	0,120	10800,0
324_20_1_49_90	56651	0,016	10800,0	0,22	196396,2	246,68	55570	56660	1,96	3095	56651,0	0,210	10800,0	56651,0	56770,4	0,210	10800,0
324_20_1_50_90	59357	0,005	10800,0	0,22	196537,3	231,11	58804	59360	0,95	4643	59357,0	0,020	10800,0	59357,0	59369,9	0,020	10800,0
Média	52876,67	0,009	4868,85	0,22	162270,3	246,67	52188,6	52883,8	1,10	3723,9	52876,7	0,071	5431,17	52876,7	52943,0	0,071	5431,17

Tabela 5. Resultados computacionais para as instâncias com 818 pontos e Q = 20 clusters.

Instância	CPLEX 10					Relaxação de programação linear					Relaxação lagrangeana (Corrêa; Lorena, 2006)					LagClus		
	Limitante Inferior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)	Limitante Inferior	Limitante Superior	GAP (%)	Tempo (s)
	818_10_0_0_95	21460	0,000	2957,7	510850,9	2280,48	750,2	*	*	*	*	21460	21460,95	0,00	2230,5			
818_10_0_1_95	35360	0,000	3404,1	513291,1	1351,62	1361,4	*	*	*	*	35360	35360,81	0,00	3763,1				
818_10_0_2_95	45390	0,000	3320,1	514036,2	1032,49	903,9	*	*	*	*	45390	45390,82	0,00	4143,7				
818_10_1_48_90	26920	0,000	3004,2	512159,6	1802,53	1440,8	*	*	*	*	26920	26920,91	0,00	3328,9				
818_10_1_49_90	28330	0,000	3303,5	512389,8	1708,65	1558,4	*	*	*	*	28330	28330,81	0,00	3359,0				
818_10_1_50_90	29680	0,000	2780,8	512591,8	1627,06	1305,8	*	*	*	*	29680	29680,99	0,00	3136,4				
818_20_0_0_95	42920	0,000	4579,9	540286,0	1158,82	338,2	*	*	*	*	42920	42920,54	0,00	2435,2				
818_20_0_1_95	70720	0,000	6392,9	540286,0	663,98	333,0	*	*	*	*	70720	98879,29	39,82	10800,0				
818_20_0_2_95	90780	0,000	7098,1	540286,0	495,16	373,7	*	*	*	*	90780	105775,55	16,52	10800,0				
818_20_0_0_85	74360	0,000	6993,7	540286,0	626,58	400,2	*	*	*	*	74360	74360,53	0,00	2505,9				
818_20_0_1_85	102000	435,000	10800,0	540286,0	435,00	258,3	*	*	*	*	102000	109518,56	7,37	10800,0				
818_20_0_2_85	119479	352,480	10800,0	540286,0	352,48	291,4	*	*	*	*	119479	120383,26	0,76	10800,0				
818_20_1_40_85	55398	0,004	10800,0	540286,0	875,28	352,6	*	*	*	*	55400	55432,88	0,06	10800,0				
818_20_1_41_85	58719	0,002	10800,0	540286,0	820,12	429,8	*	*	*	*	58720	58720,68	0,00	3142,8				
818_20_1_42_85	61818	774,000	10800,0	540286,0	774,00	408,2	*	*	*	*	61900	61980,54	0,13	10800,0				
818_20_1_48_90	53840	0,000	5565,0	540286,0	903,50	362,7	*	*	*	*	53840	53840,68	0,00	2232,8				
818_20_1_49_90	56660	0,000	5254,6	540286,0	853,56	341,3	*	*	*	*	56660	56729,77	0,12	10800,0				
818_20_1_50_90	59360	0,000	4919,3	540286,0	810,19	446,7	*	*	*	*	59360	59621,06	0,44	10800,0				
818_50_0_0_85	185876	0,013	10800,0	540286,0	190,64	162,3	*	*	*	*	185876	445932,53	139,91	10800,0				
818_50_0_1_85	251029	115,230	10800,0	540286,0	115,23	101,7	*	*	*	*	254851	540286,00	112,00	10800,0				
818_50_0_2_85	292912	84,450	10800,0	540286,0	84,45	35,7	*	*	*	*	298516	506904,03	69,81	10800,0				
818_50_1_48_90	134598	0,001	10800,0	540286,0	301,40	429,5	*	*	*	*	134598	240260,48	78,50	10800,0				
818_50_1_49_90	141648	0,001	10800,0	540286,0	281,42	294,3	*	*	*	*	141648	273443,94	93,04	10800,0				
818_50_1_50_90	148398	0,001	10800,0	540286,0	264,07	434,3	*	*	*	*	148398	319535,19	115,32	10800,0				
Média	91152,3	73,38	7432,25	533352,8	825,36	546,4	*	*	*	*	91548,6	142152,95	28,08	7561,6				

* Não foi possível calcular os limitantes inferior e superior mesmo após 3 horas de processamento.

New lagrangean bounds for the probabilistic Maximal Covering Location-Allocation Problem using covering graphs

Abstract

The Probabilistic Maximal Covering Location-Allocation Problem (PMCLAP) aims to locate facilities maximizing the number of people served and providing a good level of service. This means that customers would not have to wait longer than the wait time established or to wait in long lines. These parameters are influenced by the number of the requests for service and service time, both probabilistic. The PMCLAP is NP-Complete and in this paper we study bounds with a Lagrangean Relaxation with Clusters (LagClus). Instead of using a conflict graph to represent a problem, in this paper another strategy for the use of LagClus using a special graph called covering graph is proposed. This approach provides interesting bounds.

Keywords: Lagrangean Relaxation. Lagrangean Relaxation with Clusters. Location Problems. Maximal Covering.

Referências Bibliográficas

- ATAMTÜRK, A.; NEMHAUSER, G. L.; SAVELSBERGH, M. W. P. Conflict graphs in solving integer programming problems. **European Journal of Operational Research**, v. 121, n. 1, p. 40-55, 2000.
- CHUNG, C. H. Recent applications of the maximal covering location planning (mclp) model. **Journal of the Operational Research Society**, v. 37, n. 8, p. 735-746, 1986.
- CHURCH, R. L.; REVELLE, C. Maximal covering location problem. **Papers of the Regional Science Association**, v. 32, n. 1, p. 101-118, 1974.
- CORNUÉJOLS, G.; THIZY, J. M. Some facets of the simple plant location polytope. **Mathematical Programming**, v. 23, n. 1, p. 50-74, 1982.
- CORRÊA, F. A.; CHAVES, A. A.; LORENA, L. A. N. Hybrid heuristics for the probabilistic maximal covering location-allocation problem. **Operational Research: an International Journal**, v.7, n. 3, p. 323-343, 2007.
- CORRÊA, F. A.; LORENA, L. A. N. Aplicação da relaxação lagrangeana e do algoritmo genético construtivo na solução do problema probabilístico de localização-alocação de máxima cobertura. **Revista Gestão & Produção**, v. 13, n. 2, p. 233-244, 2006a.
- CORRÊA, F. A.; LORENA, L. A. N.; SENNE, E. L. F. Lagrangean relaxation with clusters for the uncapacitated facility location problem. In: CONGRESO LATINO-IBEROAMERICANO DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA, 2006, Montevideo. **Anais...** Universidad de la República, 2006.
- CURRENT, J. R.; O'KELLY, M. Locating emergency warning sirens. **Decision Sciences**, v. 23, n. 1, p. 221-234, 1981.
- DASKIN, M. S. **Network and discrete location: models, algorithms and applications**. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- EATON, D.; HECTOR, M.; SANCHEZ, V.; LATINGUA, R.; MORGAN, J. Determining ambulance deployment in Santo Domingo, Dominican Republic. **Journal of the Operational Research Society**, v. 37, n. 2, p. 113-126, 1986.
- FOGLIATTI, M. C.; MATTOS, N. M. C. **Teoria de filas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2007.
- GALVÃO, R. D. Uncapacitated facility location problems: contributions. **Pesquisa Operacional**, v. 24, n. 1, p. 7-38, 2004.
- GALVÃO, R. D.; REVELLE, C. S. A lagrangean heuristic for the maximal covering location problem. **European Journal of Operational Research**, v. 88, n. 1, p. 114-123, 1996.
- HALE, T. S.; MOBERG, C. R. Location science research: a review. **Annals of Operations Research**, v. 123, n. 1-4, p. 21-35, 2003.
- HOUGLAND, E. S.; STEPHENS, N. T. Air pollutant monitor siting by analytical techniques. **Journal of the Air Pollution Control Association**, v. 26, p. 52-53, 1976.
- ILOG. **Ilog Cplex 10.0: User's manual**. França, 2006. 478 p.
- KARYPIS, G.; KUMAR, V. Multilevel k-way partitioning scheme for irregular graphs. **Journal of Parallel and Distributed Computing**, v. 48, n. 1, p. 96-129, 1998.
- LARSON, R. C.; ODONI, A. R. **Urban operations research**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1981.
- LORENA, L. A. N. Análise espacial de redes com aplicações em sistemas de informações geográficas. **Revista Produção**, v. 3, n. 2, 2003.
- LORENA, L. A. N.; PEREIRA, M. A. A lagrangean/surrogate heuristic for the maximal covering location problem using Hillsman's edition. **International Journal of Industrial Engineering**, v. 9, n. 1, p. 57-67, 2002.
- MARIANOV, V.; SERRA, D. Probabilistic maximal covering location-allocation models for congested systems. **Journal of Regional Science**, v. 38, n. 3, p. 401-424, 1998.
- MARIANOV, V.; SERRA, D. Hierarchical location-allocation models for congested systems. **European Journal of Operational Research**, v. 135, n. 1, p. 195-208, 2001.
- MOORE, G. C.; REVELLE, C. S. The hierarchical service location problem. **Management Science**, v. 28, n. 7, p. 775-780, 1982.
- NARCISO, M. G.; LORENA, L. A. N. Lagrangean/Surrogate relaxation for generalized assignment problems. **European Journal of Operational Research**, v. 114, n. 1, p. 165-177, 1999.
- PARKER, R. G.; RARDIN, R. L. **Discrete optimization**. New York: Academic Press, 1988.
- PEREIRA, M. A.; LORENA, L. A. N.; SENNE, E. L. F. A column generation approach for the maximal covering location problem. **International Transactions in Operations Research**, v. 14, n. 4, p. 349-364, 2007.

- RIBEIRO, G. M.; LORENA, L. A. N. Lagrangean relaxation with clusters and column generation for the manufacture's pallet loading problem. **Computers & Operations Research**, v. 34, n. 9, p. 2695-2708, 2007.
- RIBEIRO, G. M.; LORENA, L. A. N. Optimizing the woodpulp stowage using lagrangean relaxation with clusters. **Journal of the Operational Research Society**, v. 59, p. 600-606, 2008a.
- RIBEIRO, G. M.; LORENA, L. A. N. Lagrangean relaxation with clusters for point-feature cartographic label placement problems. **Computers & Operations Research**, v. 35, n. 7, p. 2129-2140, 2008b.
- SERRA, D.; MARIANOV, V. **New trends in public facility location modeling**. Barcelona, Spain: Universitat Pompeu Fabra, 2004. Economics and Business Working Paper. n° 755. Disponível em: <<http://www.econ.upf.edu/docs/papers/downloads/755.pdf>>. Acesso em: 20 de Abril de 2008.
- WOLSEY, L. A. **Integer Programming**. New York: John Wiley & Sons, 1998.

Sobre os autores

Francisco de Assis Corrêa

Paulista University – UNIP
ZIP CODE 12240-420, São José dos Campos – SP, Brazil
e-mail: correa@unip.br

Luiz Antonio Nogueira Lorena

Brazilian Institute for Space Research – INPE
ZIP CODE 12227-010, São José dos Campos – SP, Brazil
e-mail: lorena@lac.inpe.br

Glaydston Mattos Ribeiro

Federal University of Espírito Santo – UFES
ZIP CODE 29933-415, São Mateus – ES, Brazil
e-mail: glaydstonribeiro@ceunes.ufes.br

Recebido 5/5/2008
Aceito 2/3/2009