

Validação de um Modelo Numérico Magnetohidrodinâmico Usando a Correção de Divergência Nula Parabólica-hiperbólica

Anna Karina F. Gomes

Programa de Pós-graduação em Computação Aplicada, CAP/INPE,

E-mail: karina_math@yahoo.com.br,

Margarete Oliveira Domingues

Laboatório Associado de Computação e Matemática Aplicada, LAC/CTE/INPE

São José dos Campos, São Paulo

E-mail: margarete@lac.inpe.br.

RESUMO

Este trabalho faz parte de uma pesquisa de mestrado em simulação numérica de plasma espacial utilizando o método de volumes finitos. Para modelar e simular esses fenômenos, existem vários modelos [3]. Neste trabalho, utiliza-se o modelo magnetohidrodinâmica (MHD) ideal chamado *Extensão Generalizada dos Multiplicadores de Lagrange* (EGLM) em sua forma conservativa, como apresentada em [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad \text{Eq. Continuidade} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{I} \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = -\mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \quad \text{Eq. Momento} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} + \psi \mathbf{I}) = 0 \quad \text{Eq. Campo Magnético} \quad (1c)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] = -\mathbf{B} (\nabla \psi) \quad \text{Eq. Energia} \quad (1d)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{c_h^2}{c_p^2} \psi \quad \text{Eq. Fluxo Magnético} \quad (1e)$$

em que $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ é a velocidade do fluido, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ o campo magnético, ρ a densidade, p a pressão, \mathbf{I} o tensor unitário de segunda ordem, ψ a função potencial e E a energia dada por $E = \frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2}$, sendo $\gamma > 1$ é o expoente adiabático. Fisicamente, \mathbf{B} é livre de divergência, *i.e.*, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Numericamente, essa restrição de divergência não é sempre satisfeita, fazendo com que as equações d modelo MHD não permaneçam em sua forma conservativa. Por isso, foi implementada ao modelo a correção parabólica-hiperbólica, proposta em [1]. A discretização utilizada para esse modelo é fundamentada no método dos volumes finitos [2], o qual é baseado na forma integral das leis de conservação. O domínio do problema é particionado em células de grade e aproxima-se o valor de cada célula por uma integral. Esse modelo representa uma lei de conservação hiperbólica, *i.e.*, $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0$, em que $\mathbf{U} = (\rho, p, \psi, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y, B_z)$ é o vetor de variáveis conservativas e $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ é o fluxo físico.

Para calcular numericamente $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, utiliza-se esquemas numéricos chamados de *fluxos numéricos*, neste caso o fluxo numérico Harten-Lax-Van Leer (HLL), descrito por $\mathbf{F} = \frac{S_R \mathbf{F}_L - S_L \mathbf{F}_R + S_R S_L (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)}{S_R - S_L}$, com $S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R)$ e $S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R)$, em que u_L e u_R são as velocidades do plasma e c_L e c_R as velocidades do som à esquerda e à direita. A velocidade do som utilizada é $c_f = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma p + \mathbf{B}^2}{\rho} + \sqrt{\frac{(\gamma p + \mathbf{B}^2)^2 - 4\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right)}$, a fim capturar a maior velocidade possível.

A implementação $2D$ desse modelo foi feita em C^{++} . No experimento de validação realizado, utilizou-se a condição inicial de Riemann (Tabela 1) e os parâmetros $c_{CFL} = 0.3$, $x \in (-0.5, 0.5)$ e de $y \in (0, 1)$, $\gamma = 5/3$, $c_h/c_p^2 = 1$ e uma malha regular com 1000×1000 de pontos, para $t = 0.08$. O mesmo tipo de experimento foi realizado na direção y , validando assim o código $2D$. Estão em desenvolvimento outros tipos de fluxos numéricos, como o HLLD [4], a fim de

Tabela 1: Condições Iniciais para o problema do tipo Riemann

	ρ	p	ψ	v_x	v_y	v_z	B_x	B_y	B_z
$x < 0$	1.08	0.95	0.0	1.2	0.01	0.5	$2.0/\sqrt{4\pi}$	$3.6/\sqrt{4\pi}$	$2.0\sqrt{2\pi}$
$x > 0$	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$2.0/\sqrt{4\pi}$	$4.0/\sqrt{4\pi}$	$2.0\sqrt{2\pi}$

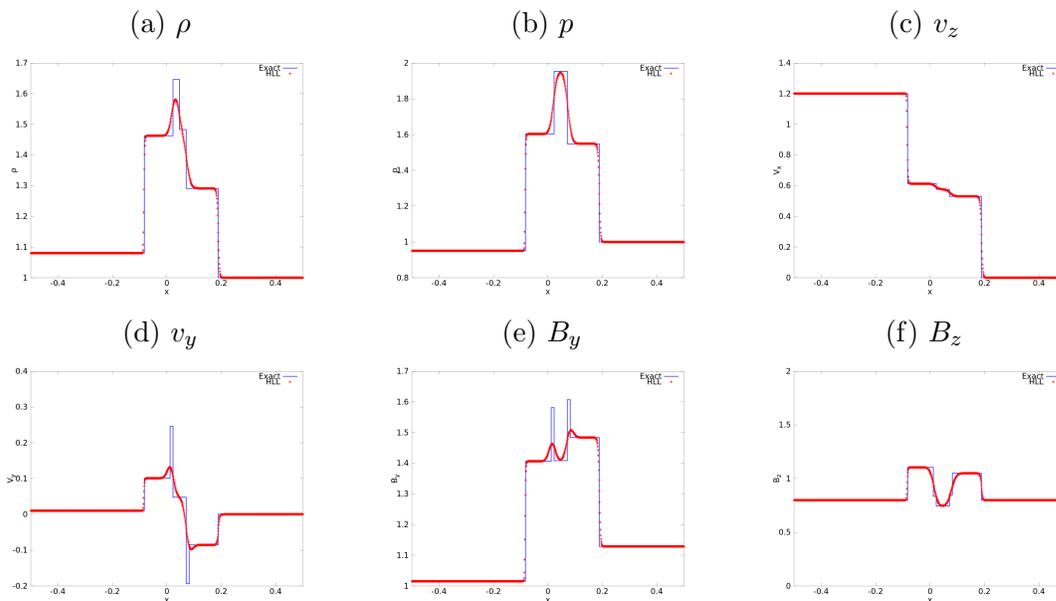


Figura 1: Gráficos das solução exata [5] e numérica em $t = 0.08$ no intervalo $[-0.5, 0.5]$.

obter uma solução melhor representada possibilitando, assim, a implementação de um futuro algoritmo adaptativo.

Palavras-chave: magnetohidrodinâmica, volumes finitos, física de plasma espacial

Referências

- [1] A. Dedner et al, Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations, *Journal of Computational Physics*, 175 (2002) 645-673.
- [2] R. LeVeque, "Finite volume methods for hyperbolic problems", Cambridge University Press, 2002.
- [3] S. A. Ledvina et al, Modelling and Simulating Flowing Plasmas and Related Phenomena, *Space Science Review*, 139 (2008) 143-189.
- [4] T. Miyoshi and K. Kusano, A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, 208 (2005) 315-344.
- [5] M. Torrilhon, Uniqueness conditions for Riemann problems of ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Plasma Physics*, 69 (2003) 253-276.