

## Estimação da Atitude de um Satélite e dos Torques Externos não Modelados Através do Filtro de Kalman

Erberson R. Pinheiro, [erberson@hotmail.com](mailto:erberson@hotmail.com)<sup>1</sup>

Helio K. Kuga, [hkk@dem.inpe.br](mailto:hkk@dem.inpe.br)<sup>1</sup>

Luiz C. G de Souza, [gadelha@dem.inpe.br](mailto:gadelha@dem.inpe.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Av dos Astronautas, 1758, São José dos Campos, SP, 12227-101.

**Resumo:** A orientação de um satélite no espaço irá sempre depender da missão na qual o satélite irá realizar. Essa orientação é chamada de atitude, e a determinação da atitude de um satélite é de suma importância, pois dessa forma, pode-se controlar a orientação do satélite no espaço. Neste artigo é considerado um modelo de um corpo rígido, e nas equações da dinâmica são considerados os principais torques externos aos quais o satélite está submetido. Um satélite de órbita baixa está submetido ao torque de gradiente de gravidade, torque aerodinâmico e torque magnético. O torque de gradiente de gravidade considerado a principal perturbação, é modelado e inserido nas equações de movimento, porém os torques aerodinâmico e magnético não são modelados e são estimados através de um processo de Gauss-Markov de primeira ordem. Através dos dados de um sensor de estrela, tem-se acesso às medidas dos ângulos de atitude continuamente a taxas da ordem de 1Hz. A partir desses dados aplica-se o filtro de Kalman, com ruído nas medidas, para assim estimar a atitude e os torques não modelados. O filtro desenvolvido é capaz de estimar a parte não modelada e ao mesmo tempo manter o desempenho sem degradar o sistema de controle. Testes e análises são realizados para comparar a eficiência desta abordagem.

**Palavras-chave:** Filtro de Kalman, Atitude de Satélite, Estimação, Torque

### 1. INTRODUÇÃO

A determinação da atitude de um satélite é de suma importância, pois dessa forma, pode-se controlar a orientação do satélite no espaço. Satélites destinados a fotografar a terra, por exemplo, precisam ter a atitude bem determinada para que seja aplicado um sistema de controle que tem como objetivo manter uma determinada orientação/atitude a fim de minimizar a distorção das imagens (Yanga e Sun, 2005). Neste trabalho o filtro de Kalman para estimar a atitude de um satélite de órbita baixa (abaixo de 800km de altitude) será usado. O filtro de Kalman vem sendo usado amplamente na área espacial, pois é de fácil implementação e devido a sua natureza recursiva, há uma grande economia de memória. Uma introdução à idéia geral do filtro de Kalman pode ser encontrada nas referências (Kuga, 2005; Grewal e Andrews, 2001). Roubache et al. (2010) usa o filtro de Kalman para estimar a atitude de um satélite de órbita baixa, porém considera apenas o caso ideal no qual não há perturbações, tais como torque magnético e torque aerodinâmico. Neste artigo além da atitude também serão estimados os torques não modelados considerados residuais. O modelo considerado é de um corpo rígido, e nas equações da dinâmica serão considerados os principais torques externos aos quais o satélite está submetido. Um satélite de órbita baixa está submetido ao torque de gradiente de gravidade, torque aerodinâmico e torque magnético (Wertz e Larson, 1989). O torque de gradiente de gravidade considerado a principal perturbação, será modelado e inserido nas equações de movimento da mesma maneira que é feito na referência (Yanga e Sun, 2005), porém os torques aerodinâmico e magnético não serão modelados e serão estimados através de um processo de Gauss-Markov de primeira ordem (Sunde, 2005; Brown, 1983). Através dos dados de um sensor de estrela, ter-se-á acesso às medidas dos ângulos de atitude continuamente a taxas da ordem de 1Hz. A partir desses dados aplica-se o filtro de Kalman não linear, com ruído nas medidas, para assim estimar a atitude e os torques não modelados. A simulação levará em conta modelos de torque magnético e aerodinâmico em situações relevantes. O filtro desenvolvido será capaz de estimar a parte não modelada e ao mesmo tempo deverá manter desempenho sem degradar o sistema de controle. Testes e análises serão realizados para comparar a eficiência desta abordagem.

Neste trabalho será usado um satélite que está a 500km de altitude, com massa  $m = 215\text{kg}$ , as dimensões serão de 2m por 1,5m, os momentos de inércia serão:  $I_1 = 90$ ,  $I_2 = 60$  e  $I_3 = 90$  (Wertz e Larson, 1989).

## 2. DINÂMICA DA ATITUDE DO SATÉLITE

Define-se um sistema de referência  $B$  fixo no corpo do satélite, com a origem localizada no centro de massa do satélite e com os vetores de base unitários  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  ao longo dos eixos principais. As equações de Euler para o movimento do satélite são dadas por (Yanga e Sun, 2005):

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = T_1, \quad (1)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = T_2, \quad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = T_3, \quad (3)$$

sendo  $I_1, I_2$  e  $I_3$  os momentos principais de inércia,  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$  são as componentes da velocidade angular dos eixos do corpo, e  $T_i$  são as componentes dos torque externos que agem sobre o satélite.

Além de considerar o sistema de referência  $B$  fixo no corpo, considera-se também um sistema de referência  $A$  local-vertical-local-horizontal (LVLH) com a origem no centro de massa do satélite. O sistema LVLH possui os seguintes vetores unitários  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ , com  $\vec{a}_1$  na direção da velocidade do satélite no plano orbital,  $\vec{a}_3$  apontando para a terra, e  $\vec{a}_2$  normal ao plano da órbita.

Para descrever o a orientação do referencial fixo no corpo  $B$  com respeito ao referencial  $A$  em termos dos ângulos de Euler, faz-se a seguinte transformação de coordenadas (3-2-1):

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix},$$

A velocidade angular do referencial fixo no corpo  $B$  relativa a um referencial inercial  $N$  fixo no centro da terra se torna

$$\vec{\omega} = \omega_1\vec{b}_1 + \omega_2\vec{b}_2 + \omega_3\vec{b}_3, \quad (4)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi c\theta \\ 0 & -s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} c\theta s\psi \\ s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \end{bmatrix}.$$

e  $n$  é a frequência orbital do satélite que é dada por

$$n = \sqrt{\mu/R^3}, \quad (5)$$

para um satélite que está a 500km temos que  $R = (6378 + 500)km = 6878km$ , assim

$$n = \sqrt{3,986 \times 10^{14}/6878000^3} = 0,0011Hz. \quad (6)$$

Para pequenos desvios da atitude, i.e.,  $\theta \cong \phi \cong \psi \cong 0$  obtemos a seguinte cinemática da atitude linearizada

$$\omega_1 = \dot{\phi} - n\psi, \quad (7)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta} - n, \quad (8)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + n\phi. \quad (9)$$

Em seguida serão modelados de maneira simplificada os torques de gradiente de gravidade, aerodinâmico e magnético, para um satélite de órbita baixa (500km) circular. Serão considerados condições críticas que testam o método de determinação de atitude.

### 2.1 Torque de gradiente de gravidade

Se o campo gravitacional for uniforme sobre o corpo, o centro de massa se torna o centro de gravidade, e o torque gravitacional sobre o centro de massa é zero. No espaço, o campo gravitacional não é uniforme, e as variações resultantes na força gravitacional (em magnitude e direção) sobre o corpo leva, em geral, ao torque gravitacional em torno do centro de massa do corpo. Considerando que o centro de massa do satélite está em uma órbita kepleriana circular e a terra é esférica, o torque de gradiente de gravidade em torno dos eixos do corpo é dado por (Yanga e Sun, 2005; Sunde, 2005).

$$T_{g1} = 3n^2(I_3 - I_2)\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi, \quad (10)$$

$$T_{g2} = 3n^2(I_3 - I_1)\cos\theta\cos\phi\sin\theta, \quad (11)$$

$$T_{g3} = 3n^2(I_1 - I_2)\cos\theta\sin\phi\sin\theta. \quad (12)$$

## 2.2 Torque magnético

A interação de materiais magnéticos dos veículos espaciais com o campo magnético da terra, resulta em um torque que pode ser expresso da seguinte maneira

$$\vec{T}_m = \vec{M} \times \vec{B}, \quad (13)$$

sendo  $\vec{M}$  o momento magnético residual do veículo espacial causado pelo magnetismo permanente e induzido, e  $\vec{B}$  é a densidade de fluxo de magnético geocêntrico. A magnitude do campo magnético da terra pode ser aproximado da seguinte forma (Wertz e Larson, 1989)

$$B = \frac{\mu_E}{r^3}(1 + 3\text{sen}^2\Theta)^{1/2}, \quad (14)$$

sendo  $r = 6878\text{km}$  a distância do centro do dipolo ao satélite,  $\mu_E = 7,96 \times 10^{15}\text{tesla} \cdot \text{m}^3$  a magnitude do vetor de momento magnético ao longo da direção magnética axial, e  $\Theta$  é a latitude magnética medida do equador geomagnético. Com esses dados temos que para o pior caso o campo magnético será equivalente a  $B = 5 \times 10^{-5}$ . Considerando que o dipolo magnético do satélite  $\vec{M}$  tenha magnitude  $1\text{A} \cdot \text{m}^2$ , temos que

$$T_m = 5 \times 10^{-5}\text{N} \cdot \text{m}. \quad (15)$$

Supondo uma órbita tal que as linhas do campo magnético terrestre só gerem torque magnético no plano local, então pode-se assumir uma lei do tipo

$$\vec{T}_m = 5 \times 10^{-5}\text{sen}(nt)\vec{b}_1 + 5 \times 10^{-5}\text{cos}(nt)\vec{b}_2. \quad (16)$$

## 2.3 Torque aerodinâmico

O rápido movimento de um veículo espacial na atmosfera causa torque aerodinâmico. O torque pode ser expresso como (Wertz e Larson, 1989)

$$\vec{T}_a = \frac{1}{2}\rho V^2 C_d A (\vec{u} \times \vec{s}_{cp}), \quad (17)$$

sendo  $\rho = 3 \times 10^{-11}\text{kg/m}^3$  a densidade atmosférica típica para a altitude,  $C_d = 2$  o coeficiente de arrasto,  $V = 7613\text{m/s}$  a velocidade do veículo espacial,  $A = 3\text{m}^2$  a área do veículo espacial perpendicular a  $\vec{u}$ ,  $\vec{s}_{cp}$  é o vetor que vai do centro de massa ao centro de pressão e  $\vec{u}$  o vetor unitário na direção da velocidade, sendo neste trabalho  $|\vec{u} \times \vec{s}_{cp}| = 0,2\text{m}$ . Dessa forma, temos o seguinte resultado

$$T_a = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-11} \times 7613^2 \times 2 \times 3 \times 0,2 = 1,04 \times 10^{-3}\text{N} \cdot \text{m}. \quad (18)$$

Será considerado que o satélite possui um painel solar frontal a velocidade. Dessa forma, pode-se considerar que o torque aerodinâmico seja mais influente no ângulo de yaw, ou seja, ter-se-a a seguinte componente do torque aerodinâmico

$$\vec{T}_a = T_a \vec{b}_3. \quad (19)$$

## 2.4 Modelo da dinâmica de atitude

Substituindo todos esses torques nas equações de Euler Eqs. (1)-(3) e usando as equações linearizadas Eqs. (7)-(9), obtemos um modelo da dinâmica linearizado de atitude para microssatélites (Yanga e Sun, 2005)

$$I_1 \ddot{\phi} - n(I_1 - I_2 + I_3)\dot{\psi} + 4n^2(I_2 - I_3)\phi = T_m, \quad (20)$$

$$I_2 \ddot{\theta} + 3n^2(I_1 - I_3)\theta = T_m, \quad (21)$$

$$I_3 \ddot{\psi} + n(I_1 - I_2 + I_3)\dot{\phi} + n^2(I_2 - I_1)\psi = T_a. \quad (22)$$

Podemos observar que a dinâmica do ângulo de pitch é desacoplada da dinâmica de roll/yaw, dessa forma, as leis de controle do ângulo de pitch podem ser projetadas separadamente de roll/yaw.

## 2.5 Modelo do sensor estrela

Os sensores estrelas medem as coordenadas das estrelas no referencial do satélite e fornecem a atitude quando essas coordenadas observadas são comparadas com as direções conhecidas obtidas do catálogo de estrelas. Neste trabalho será necessário construir um modelo simples para o sensor de estrela (Cemenska, 2004). O sensor pode ser modelado como sendo a atitude real mais um ruído (Sunde, 2005). Dessa forma, temos

$$medida_{sensor} = medida_{real} + ruido.$$

Para calcular a atitude real será necessário integrar as equações (20)-(22). Para a abordagem que está sendo considerada será necessário fazer a seguinte definição:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi & \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T.$$

Tem-se então a seguintes equações a serem integradas para efeito de simulação:

$$\dot{x}_1 = x_4, \quad (23)$$

$$\dot{x}_2 = x_5, \quad (24)$$

$$\dot{x}_3 = x_6, \quad (25)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_1} [n(I_1 - I_2 + I_3)x_6 - 4n^2(I_2 - I_3)x_1 + T_m], \quad (26)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{I_2} [-3n^2(I_1 - I_3)x_2 + T_m], \quad (27)$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{I_3} [-n(I_1 - I_2 + I_3)x_4 - n^2(I_2 - I_1)x_3 + T_a]. \quad (28)$$

Após integrar essas equações ter-se-á os ângulos de atitude e as velocidades angulares. Posteriormente será somado um ruído a esses ângulos obtendo assim um modelo para o sensor estrela. Será considerado que o satélite possui uma velocidade de 0,6 graus/s em torno do ângulo de pitch.

## 3. FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman é um estimador recursivo usado amplamente, pois é de fácil implementação e devido a sua natureza recursiva há uma economia de memória de armazenamento, já que as observações são processadas à medida que vão sendo coletadas (Kuga, 2005; Grewal e Andrews, 2001). Neste trabalho será implementado o filtro de Kalman estendido, pois o modelo que está sendo utilizado é não linear, impreciso e simplificado para modelar o movimento de atitude do satélite.

Seja a dinâmica não linear do sistema dada por

$$\dot{x} = f(x, t) + G\omega, \quad (29)$$

sendo  $x$  o vetor de estado do sistema;  $f(x, t)$  é a função vetorial não linear do estado  $x$  e tempo  $t$ ;  $G$  é a matriz de adição do ruído dinâmico e  $\omega$  é o ruído dinâmico.

O vetor  $\omega$  representa os erros do modelo e possui natureza aleatória, a sua estatística é dada por

$$E[\omega(t)] = 0, \quad (30)$$

$$E[\omega(t)\omega^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau), \quad (31)$$

sendo que  $E$  representa o operador esperança,  $Q$  é a matriz de covariância do ruído dinâmico e  $\delta$  é a função delta de Dirac.

O modelo das observações é dado por

$$y_k = H_k x_k + \nu_k, \quad (32)$$

sendo  $y$  o vetor de  $m$  observações independentes coletadas,  $H$  é a matriz que relaciona as observações ao estado e  $\nu$  é o vetor de ruídos brancos discretos e  $k$  representa os sucessivos instantes de amostragem das observações.

O vetor de ruído branco  $\nu$  modela os erros de natureza aleatória cometidos durante a realização das medidas. A sua estatística é dada por

$$E[\nu_k] = 0, \quad (33)$$

$$E[\nu\nu^T] = R_k\delta_{kj}, \quad (34)$$

sendo  $R$  a matriz de covariância dos erros de observações e  $\delta$  é o delta de Kronecker.

O filtro de Kalman consiste de duas etapas: a fase de propagação e a fase de atualização. A fase de propagação propaga o estado e a covariância do instante  $t_{k-1}$  a  $t_k$  e a fase de atualização corrige o estado e a covariância para o instante  $t_k$  devido a medida  $y_k$ .

Fase de propagação: esta fase é utilizada para propagar o estado e a covariância entre instantes discretos através do modelo dinâmico do sistema. As equações da fase de propagação são dadas por

$$\dot{\hat{x}}_k = f(\hat{x}_{k-1}), \quad (35)$$

$$\hat{P}_k = \Phi_{k,k-1}\hat{P}_{k-1}\Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_k Q_k \Gamma_k^T, \quad (36)$$

sendo  $\hat{x}_k$  e  $\hat{P}_k$  são o estado e a covariância propagados para o instante  $t_k$ .  $\Phi$  é a matriz de transição que relaciona o estado entre os instantes  $t_{k-1}$  e  $t_k$  e é calculada através de

$$\dot{\phi} = F\phi, \quad (37)$$

com condição inicial  $\phi_{k-1,k-1} = I$  sendo  $F = [\partial f / \partial x]_{x=\bar{x}}$  a jacobiana do sistema.

O termo  $\Gamma_k Q_k \Gamma_k^T$  é a matriz de adição do ruído dinâmico dada por:

$$\Gamma_k Q_k \Gamma_k^T = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \phi(t_k, \tau) G(\tau) Q(\tau) G^T(\tau) \phi^T(t_k, \tau) d\tau. \quad (38)$$

Fase de atualização: esta fase é utilizada para corrigir o estado e a covariância do instante  $k$  devido a medida  $y_k$ . As medidas do instante  $k$  fornecem a informação para corrigir o estado e a covariância. As equações para esta fase de atualização são dadas por:

$$K_k = \hat{P}_k H_k^T (H_k \hat{P}_k H_k^T + R_k)^{-1}, \quad (39)$$

$$\hat{P}_k = (I - K_k H_k) \hat{P}_k \quad (40)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k). \quad (41)$$

sendo  $K_k$  o ganho de Kalman e  $\hat{x}$  e  $\hat{P}$  são o estado e a covariância atualizados para o instante  $k$ .

#### 4. APLICAÇÃO DO FILTRO DE KALMAN

Agora o filtro de Kalman será aplicado para que possa ser feito a estimação da atitude e dos torques não modelados, visto que temos as medidas fornecidas pelo sensor estrela. As equações do estado aumentado são dadas por

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_1} [n(I_1 - I_2 + I_3)\dot{\psi} - 4n^2(I_2 - I_3)\phi + T_1] + \omega_1, \quad (42)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_2} [-3n^2(I_1 - I_3)\theta + T_2] + \omega_2, \quad (43)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_3} [-n(I_1 - I_2 + I_3)\dot{\phi} - n^2(I_2 - I_1)\psi + T_3] + \omega_3, \quad (44)$$

$$\dot{T}_1 = -\frac{1}{\tau} T_1 + \omega_4 \quad (45)$$

$$\dot{T}_2 = -\frac{1}{\tau} T_2 + \omega_5, \quad (46)$$

$$\dot{T}_3 = -\frac{1}{\tau} T_3 + \omega_6, \quad (47)$$

sendo  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  os torques não modelados em cada direção. A derivada temporal desses torques pode ser aproximado a um processo de Gauss-Markov de primeira ordem (Brown, 1983; Bak, 1999). Escrevendo estas equações no formato de espaço de estados temos

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_4, \\
\dot{x}_2 &= x_5, \\
\dot{x}_3 &= x_6, \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{I_1}[n(I_1 - I_2 + I_3)x_6 - 4n^2(I_2 - I_3)x_1 + x_7] + \omega_1, \\
\dot{x}_5 &= \frac{1}{I_2}[-3n^2(I_1 - I_3)x_2 + x_7] + \omega_2, \\
\dot{x}_6 &= \frac{1}{I_3}[-n(I_1 - I_2 + I_3)x_4 - n^2(I_2 - I_1)x_3 + x_7] + \omega_3, \\
\dot{x}_7 &= -\frac{1}{\tau}x_7 + \omega_4, \\
\dot{x}_8 &= -\frac{1}{\tau}x_8 + \omega_5, \\
\dot{x}_9 &= -\frac{1}{\tau}x_9 + \omega_6.
\end{aligned} \tag{48}$$

Tem-se então o seguinte vetor de estados a serem estimados pelo filtro de Kalman:

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9]^T$$

O modelo da medida é dado pela Eq. (32) e a estatística do ruído  $\nu$  que modela os erros de natureza aleatória cometidos durante a realização das observações é dada pelas Eqs. (33) e (34). Explicitamente, a matriz de covariância dos erros de observações  $R$  é dada por

$$R = \text{diag} [\sigma^2 \ \sigma^2 \ \sigma^2].$$

O sensor estrela possui um grau de precisão da ordem de 10 arcsegundos em todos os eixos (Sunde, 2005) que é equivalente a 0,00278 graus. Dessa forma, temos que

$$R = \text{diag} [0,00278^2 \ 0,00278^2 \ 0,00278^2].$$

Será considerado também a seguinte matriz de covariância do ruído dinâmico

$$Q = \text{diag} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10^{-12} \ 10^{-12} \ 10^{-12}].$$

Os valores iniciais para o estado e covariância do filtro de Kalman serão dados por

$$x_0 = [5 \ 5 \ 5 \ 0,6 \ 0,6 \ 0,6 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

$$P_0 = [2 \ 2 \ 2 \ 0,8 \times 10^{-4} \ 0,8 \times 10^{-4} \ 0,8 \times 10^{-4} \ 3 \times 10^{-5} \ 3 \times 10^{-5} \ 3 \times 10^{-5}]^T.$$

Para efeito de propagação será considerado que as medidas de ângulos estão em graus, as velocidades em graus/s e os torques em  $N \cdot m$ .

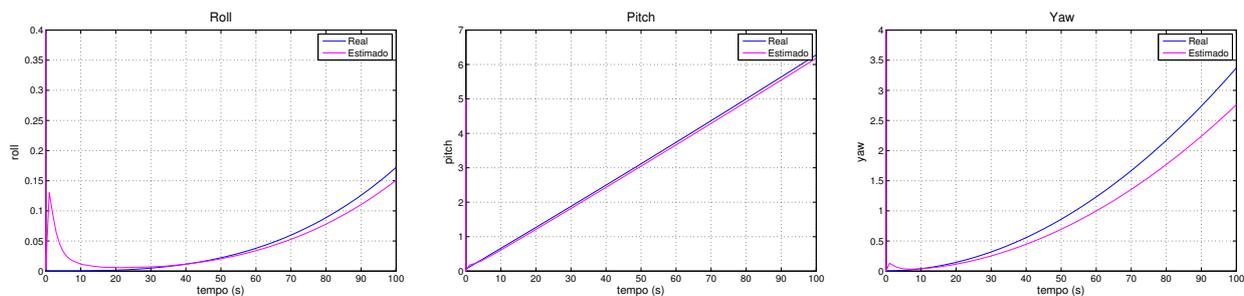
## 5. RESULTADOS

A simulação é feita com dois tipos de Filtro de Kalman. Um dos filtros não inclui na dinâmica a ação dos torques aerodinâmico  $T_a$  e magnético  $T_m$ , e como consequência não estima os torques não modelados, esse filtro será chamado de FK1. O outro filtro inclui na dinâmica a ação dos torques, e como consequência além de estimar a atitude também estima os torques não modelados, esse filtro será chamado de FK2. As medidas utilizadas foram simuladas para os seguintes casos

- Tipo 1: A dinâmica de atitude contém o torque de gradiente de gravidade e não leva em consideração os torques não modelados (caso ideal).
- Tipo 2: Leva em consideração o torques aerodinâmico e o torques magnético.

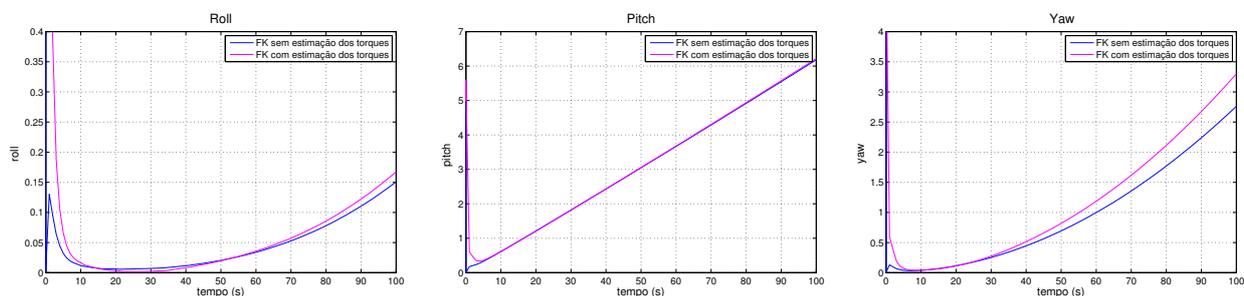
O primeiro caso a ser analisado é a estimação da atitude do satélite considerando o caso ideal, ou seja, sem levar em consideração os torques externos. Aplicando o FK1 para esse caso, pode ser observado que o filtro é capaz de estimar a atitude com um erro de  $1,42 \times 10^{-3}$  graus para roll,  $5,84 \times 10^{-2}$  graus para pitch e  $1,7 \times 10^{-3}$  graus para yaw. Esse resultado é aceitável, pois está de acordo com o resíduo calculado.

O segundo caso analisado é a estimação da atitude do satélite considerando as medidas fornecidas pelo sensor levando em consideração os torques (medida tipo 2), porém usando o filtro que não incorpora os torques na dinâmica do sistema (FK1). Pode ser observado que o resultado obtido não é satisfatório, pois observa-se um erro de  $2,13 \times 10^{-2}$  graus para roll,  $9,82 \times 10^{-2}$  graus para pitch e  $6,10 \times 10^{-1}$  graus para yaw Fig. (1). Porém os resíduos são da ordem de  $10^{-2}$  para roll e pitch e  $10^{-1}$  para yaw. O maior erro acontece no ângulo de yaw, e isso se deve ao fato de que o ângulo de yaw é perturbado pelo torque aerodinâmico, que por sua vez é o torque de maior magnitude.



**Figura 1:** Comparação entre o valor estimado e o valor real usando a medida com torque para o filtro que não estima os torques.

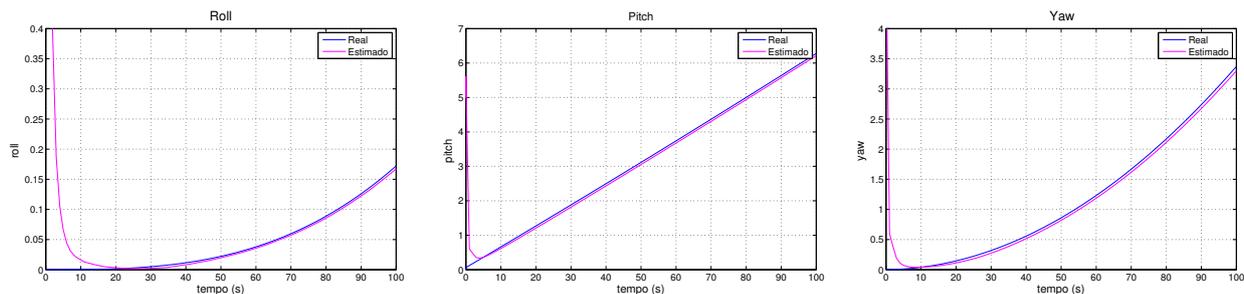
Outro caso analisado é uma comparação entre a estimação da atitude através do filtro de Kalman que estima os torques não modelados (FK2) e o filtro de Kalman que não estima os torques não modelados (FK1). De acordo com a Fig. (2) o ângulo de yaw é o que possui a maior diferença (diferença =  $5,38 \times 10^{-1}$  graus), que acontece devido o fato do ângulo de yaw ser o ângulo sujeito a uma perturbação de maior magnitude.



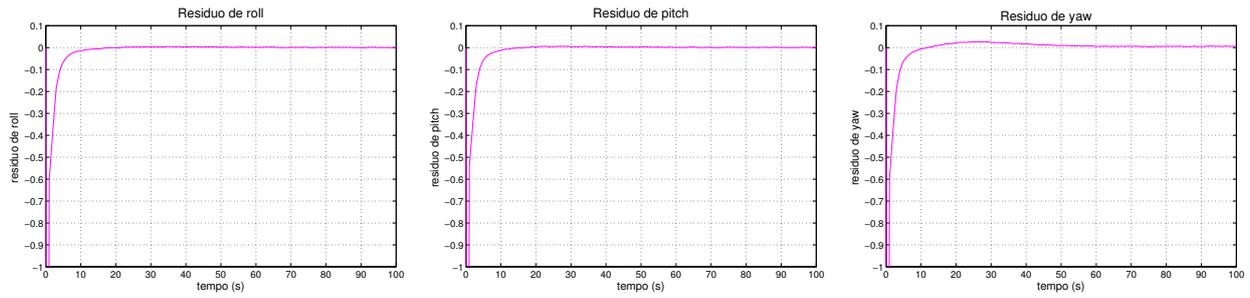
**Figura 2:** Comparação entre o filtro FK1 e o filtro FK2.

Observando os resultados obtidos nessas simulações, pode-se chegar à conclusão de que a estimação da atitude deve levar em consideração a estimação dos torques não modelados, para que se obtenha um resultado satisfatório.

Agora será feito uma análise detalhada da estimação da atitude de um satélite, no entanto além da estimação da atitude será estimado também os torques não modelados, que por sua vez foram aproximados a um processo de Gauss-Markov de primeira ordem. O FK2 foi capaz de estimar a atitude do satélite com um erro muito pequeno, como pode ser observado na Fig. (3), que mostra o gráfico do valor real comparado com o valor estimado. O erro obtido é de  $4,80 \times 10^{-3}$  graus para roll,  $6,36 \times 10^{-2}$  graus para pitch e  $7,23 \times 10^{-2}$  graus para yaw. A Fig. (4) mostra o resíduo do filtro FK2. Após um transiente inicial menor que  $10s$  os resíduos do filtro FK2 tendem a zero, mostrando a convergência do filtro.

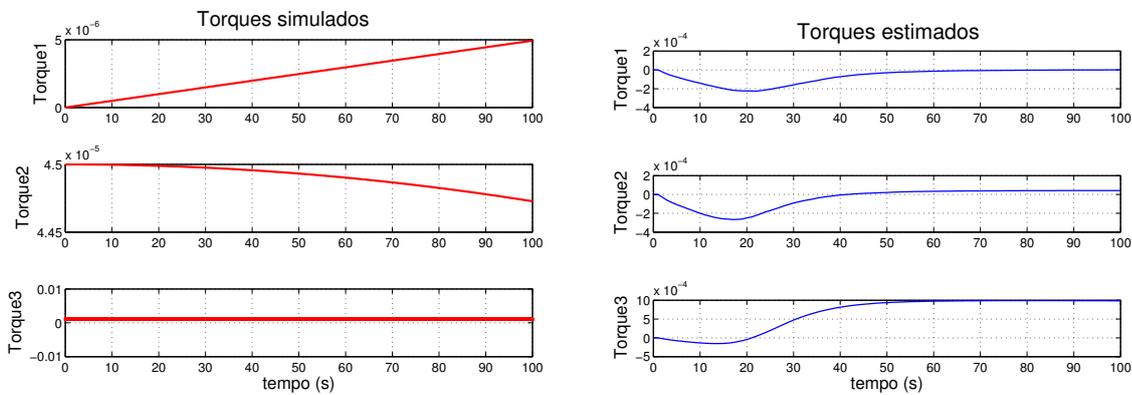


**Figura 3:** Comparação entre o valor real e o valor estimado usando o FK2.

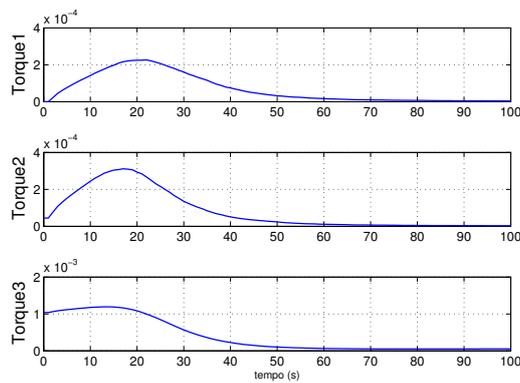


**Figura 4:** Resíduo do FK2.

Nota-se que na Fig. (5) mostra-se os torques simulados à esquerda e os torques estimados à direita. Os torques estimados também estão convergindo para os valores dos torques modelados conforme a Fig. (5). Após um transiente inicial de cerca de 40s, o filtro vai convergindo para os valores esperados de torques. Nota-se que para este intervalo de 100s o FK2 chega à mesma ordem de grandeza dos valores verdadeiros e variantes no tempo dos torques magnéticos e aerodinâmico. Observar que o filtro iniciou com as estimativas dos torques zeradas. A Fig. (6) mostra os erros nas estimativas dos torques que vão se aproximando de zero com o tempo.



**Figura 5:** Torques simulados e estimados..



**Figura 6:** Erro dos torques.

## 6. CONCLUSÃO

Este trabalho mostrou a modelagem da dinâmica de atitude incluindo torques de natureza gravitacional, aerodinâmica e magnética. Inicialmente inclui-se na dinâmica do filtro de Kalman somente o modelo de torque de gradiente de gravidade. Na ausência dos torques aerodinâmicos e magnéticos (não modelados), o filtro “ideal” comporta-se como o esperado. Porém quando a simulação leva em conta os torques aerodinâmicos e magnéticos e o filtro de Kalman não os modela (FK1), o FK1 não mostrou desempenho satisfatório. Propõe-se neste trabalho estimar os torques não modelados por um processo de Gauss-Markov de primeira ordem. O filtro FK2 desenvolvido mostra desempenho satisfatório na presença desses torques.

## 7. REFERÊNCIAS

- Bak, T., 1999. *Spacecraft Attitude Determination - a Magnetometer Approach*, Master thesis, Department of Control Engineering, Aalborg University.
- Brown, R. G., 1983. *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*, John Wiley & Sons, New York.
- Cemenska, J., 2004. *Sensor Modeling and Kalman Filtering Applied to Satellite Attitude Determination*, Master thesis, Department of Engineering Cybernetics, NTNU.
- Grewal, M.S. and Andrews, A.P., 2001. *Kalman Filtering: Theory and Practice using MATLAB*, John Wiley & Sons, NY.
- Kuga, H.K., 2005 *Noções Práticas de Técnicas de Estimção*, INPE.
- Roubache, R., Benyettou, M., Mohammede, A. M., Bellar, A. “Six State Kalman Filtering for LEO Microsatellite Attitude Determination”, *Control Engineering Practice*, Vol 10, pp. 951–970.
- Sunde, B.O., 2005. *Sensor modelling and attitude determination for micro-satellite*, Master thesis, Department of Engineering Cybernetics, NTNU.
- Wertz, J. R. and Larson, W.J., 1989. *Space Mission Analysis and Design*, Microcosm Press, California.
- Yanga, C. and Sun, P., 2002. “Mixed  $H_2/H_\infty$  state-feedback design for microsatellite attitude control”, *Control Engineering Practice*, Vol 10, pp. 951–970.

### Estimation of the Attitude and of the No Modeled External Torques of a Satellite through the Kalman Filtering

Erberson R. Pinheiro, [erberson@hotmail.com](mailto:erberson@hotmail.com)<sup>1</sup>

Helio K. Kuga, [hkk@dem.inpe.br](mailto:hkk@dem.inpe.br)<sup>1</sup>

Luiz C. G de Souza, [gadelha@dem.inpe.br](mailto:gadelha@dem.inpe.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, INPE, Av dos Astronautas, 1758, São José dos Campos, SP, 12227-101.

**Abstract:** *The orientation of a satellite in space will always depend on the mission in which the satellite will perform. This orientation is called attitude, and the determination of the attitude of a satellite is of paramount importance, because this way you can control the orientation of the satellite in space. In this article is considered a model of a rigid body, and the equations of dynamics are derived considered the major external torques to which the satellite is subjected. A low orbit satellite is subject to gravity gradient torque, aerodynamic torque and magnetic torque. The gravity gradient torque considered as the major disturbance in the model and it is inserted into the equations of motion, but the aerodynamic and magnetic torques are not modeled and they are estimated using a Gauss-Markov process of first order. Through the data from a star sensor, one has access to measures of the attitude angles continually at the rates of the order of 1 Hz. From these data, one applies the Kalman filter, with noise in the measurements, in order to estimate the attitude and the no-modeled torques. The simulated model takes into account magnetic and aerodynamic torque in relevant situations. The filter is designed capable of estimating the no-modeled torques at the same time that control system performance is not degraded. Tests and analyzes are performed to compare the efficiency of this approach.*

**Keywords:** *Kalman Filter, Estimation, Attitude of Satellite, Torque.*