

## REGIÕES DE ESTABILIDADE DO MOVIMENTO ROTACIONAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS NA PRESENÇA DO TORQUE DE GRADIENTE DE GRAVIDADE

William Reis Silva, [reis.william@gmail.com](mailto:reis.william@gmail.com)<sup>1</sup>  
Maria Cecília F. P. S. Zanardi, [cecilia@feg.unesp.br](mailto:cecilia@feg.unesp.br)<sup>2</sup>  
Jorge Kennety S. Formiga, [jkennety@yahoo.com.br](mailto:jkennety@yahoo.com.br)<sup>3</sup>  
Regina Elaine S. Cabette, [recabette@uol.com.br](mailto:recabette@uol.com.br)<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Centro de Controle de Satélites, Instituto Nacional de Pesquisa Espaciais (INPE), São José dos Campos, 12227-010, SP, Brasil.

<sup>2</sup>Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brasil.

<sup>3</sup>Departamento de Manutenção de Aeronaves e Manufatura Aeronáutica, Faculdade de Tecnologia (FATEC), São José dos Campos, 12247-004, SP, Brasil.

<sup>4</sup>Universidade Salesiana de São Paulo (UNISAL), Lorena, 12600-100, SP, Brasil.

**Resumo:** Este trabalho tem por objetivo analisar a estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais simétrico (com dois momentos principais de inércia iguais) em órbita circular sob a influência do torque de gradiente de gravidade, usando as variáveis de Andoyer. O método utilizado neste trabalho para analisar a estabilidade é o teorema de Kovalev e Savchenko, o qual requer a redução da Hamiltoniana na forma normal até quarta ordem, por meio de transformações canônicas em torno dos pontos de equilíbrio. Os coeficientes da Hamiltoniana normal são indispensáveis no estudo de estabilidade não linear de seus pontos de equilíbrio de acordo com as três condições estabelecidas no teorema. Aplicações são realizadas para satélites de pequeno porte, com dados similares ao primeiro Satélite Brasileiro de Coleta de Dados - SCD1, utilizando o software MATHEMATICA. Diversos pontos de equilíbrio estáveis foram determinados e regiões de equilíbrio ao redor destes pontos foram estabelecidas através de variações na inclinação orbital e nos momentos principais de inércia do satélite. Em comparação com trabalhos anteriores os resultados mostram um maior número de pontos de equilíbrio e uma otimização no algoritmo de determinação da forma normal e na análise de estabilidade, devido a possibilidade de inclusão de cálculo analítico dos coeficientes da Hamiltoniana normal de quarta ordem. Assim, a utilização das variáveis de Andoyer se mostra adequada para a análise da estabilidade do movimento rotacional, podendo ser útil em análises de missões espaciais. Salienta-se que o lançamento do satélite em regiões de estabilidade pode contribuir para a manutenção da atitude do satélite, podendo gerar uma economia de combustível através de um menor número de manobras de atitude para manter a atitude desejada da missão.

**Palavras-chave:** Movimento rotacional, estabilidade, satélites artificiais.

### 1. INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade do movimento rotacional de um satélite levando em conta a influência dos torques externos é muito importante na manutenção da atitude para assegurar o sucesso de uma missão espacial.

Pontos de equilíbrios e/ou regiões de estabilidade são estabelecidas quando parcelas associadas a torques externos atuantes no satélite são incluídas nas equações de movimento rotacional. Neste trabalho o torque externo considerado é o torque de gradiente de gravidade.

As variáveis de Andoyer são utilizadas para descrever o movimento rotacional do satélite, de modo a facilitar a aplicação de métodos de estabilidade de sistemas Hamiltonianos.

As variáveis canônicas de Andoyer (Kinoshita, 1972) são representadas pelos momentos generalizados ( $L_1, L_2, L_3$ ) e pelas coordenadas generalizadas ( $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ ) e estão esquematizadas na Fig. (1). As variáveis  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  são ângulos relacionados com o sistema do satélite  $Oxyz$  (com eixos paralelos ao sistema de eixos principais de inércia do satélite) e o sistema equatorial  $OXYZ$  (com eixos paralelos ao eixo do sistema equatorial da Terra). As variáveis métricas de Andoyer  $L_1, L_2, L_3$  são definidas como:  $L_2$  é o módulo do vetor momento angular de rotação  $\vec{L}_2$ ,  $L_1$  e  $L_3$  são,

respectivamente, a projeção de  $\vec{L}_2$  no eixo  $z$  do sistema de eixos principal de inércia ( $L_1 = L_2 \cos J_2$ , onde  $J_2$  é o ângulo entre o eixo do satélite  $z$  e  $\vec{L}_2$ ) e a projeção de  $\vec{L}_2$  no eixo equatorial  $Z$  ( $L_3 = L_2 \cos I_2$ , onde  $I_2$  é o ângulo entre o eixo equatorial  $Z$  e  $\vec{L}_2$ ).

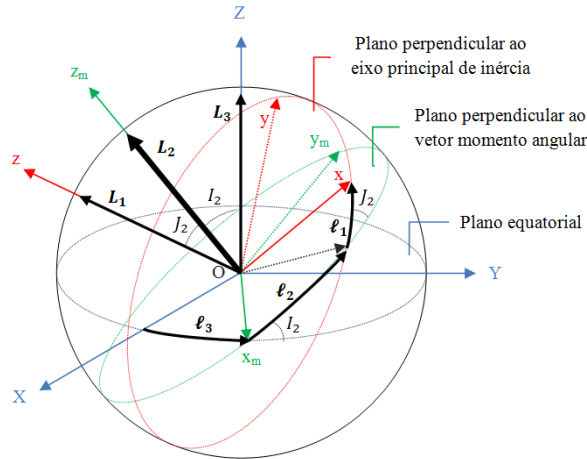


Figura 1. Variáveis de Andoyer

A estabilidade não linear dos pontos de equilíbrio do movimento rotacional é aqui analisada pelo teorema de Kovalev e Savchenko (1975), que requer a Hamiltoniana normalizada em torno dos pontos de equilíbrio.

Assim com a Hamiltoniana do problema, os pontos de equilíbrio das equações de movimento são encontrados, de modo a transformar a Hamiltoniana em sua forma normal até a quarta ordem. Deste modo pode-se verificar se os pontos de equilíbrio, que são linearmente estáveis, permanecem estáveis sobre influência dos termos de ordem superior da Hamiltoniana.

Neste trabalho foram feitas simulações numéricas para um tipo de satélites artificiais hipotéticos simétricos e em órbita circular, aqui classificado como de pequeno porte, de acordo com suas características físicas e geométricas.

## 2. HAMILTONIANA E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As variáveis de Andoyer, definidas na seção anterior, são usadas para caracterizar o movimento rotacional de um satélite ao redor de seu centro de massa e as variáveis de Delaunay descrevem o movimento translacional do centro de massa do satélite ao redor da Terra (Kinoshita, 1972).

As variáveis de Delaunay ( $L, G, H, l, g, h$ ) são definidas como:  $L = M\sqrt{\mu a}$ ,  $G = L\sqrt{1 - e^2}$ ,  $H = G \cos I$ ,  $l$  é a anomalia média,  $g$  é o argumento do perigeu,  $h$  é a longitude do nodo ascendente,  $M$  é a massa do satélite,  $\mu$  é o parâmetro gravitacional de Terra,  $I$  é a inclinação da órbita,  $a$  é o semieixo maior e  $e$  é a excentricidade orbital.

Aqui é assumido que o satélite tem órbita circular e conhecido, de modo que o enfoque principal do trabalho é apenas o movimento rotacional do satélite. Neste caso a Hamiltoniana do problema é expressa em termos das variáveis de Andoyer e das variáveis de Delaunay (Zanardi, 1986) da seguinte forma:

$$F(L_1, L_2, L_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3, L, G, H, l, g, h) = F_0(L, \ell_1, L_1, L_2) + F_1(L_1, L_2, L_3, \ell_2, \ell_3, L, G, H, l, g, h), \quad (1)$$

em que  $F_0$  é a Hamiltoniana não perturbada e  $F_1$  é o termo associado com a Hamiltoniana do torque de gradiente de gravidade, respectivamente descritas por Zanardi (1983):

$$F_0 = -\frac{\mu^2 M^3}{2L^2} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) L_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) L_2^2 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (L_2^2 - L_1^2) \cos 2\ell_1, \quad (2)$$

$$F_1 = \frac{\mu^4 M^6}{L^6} \left[ \frac{2C-A-B}{2} \mathcal{h}_1(\ell_m, L_n) + \frac{A-B}{4} \mathcal{h}_2(\ell_m, L_n) \right], \quad (3)$$

em que  $m = 2, 3$  e  $n = 1, 2, 3$ ;  $A, B$  e  $C$  são os momentos principais de inércia do satélite;  $\mathcal{h}_1$  e  $\mathcal{h}_2$  são funções das variáveis  $(\ell_m, L_n)$ , onde  $\ell_2$  e  $\ell_3$  são argumentos dos cossenos presente na Hamiltoniana. Sua forma completa é apresentada em Silva(2012), considerando o satélite em órbita circular.

Logo, as equações de movimento associadas à Hamiltoniana, são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{d\ell_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}, \\ \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \ell_i}, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Essas equações são utilizadas para encontrar os possíveis pontos de equilíbrio do movimento rotacional.

Nesse estudo, é também considerado que o satélite possui dois de seus momentos principais de inércia iguais,  $B = A$ . Com essa relação, a variável  $\ell_1$  não estará presente na Hamiltoniana (ver Eq. (2)), reduzindo o sistema dinâmico a 2 graus de liberdade, condição necessária para aplicação do teorema de estabilidade utilizado.

### 3. FORMA NORMAL DA HAMILTONIANA DO MOVIMENTO ROTACIONAL

#### 3.1. Forma normal da Hamiltoniana de 2ª ordem

Determinar a forma normal de um sistema hamiltoniano, nada mais é que obter uma Hamiltoniana de uma maneira conveniente ao estudo a ser realizado, ou seja, via uma transformação polinomial de coordenadas (canônicas para sistemas Hamiltonianos), obtém-se uma simplificação de um sistema dinâmico nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio.

Suponha que, sem perda de generalidades, o ponto de equilíbrio de sistema hamiltoniano com  $2n$  dimensões seja estável e que todos os  $n$  autovalores associados ao sistema linear reduzido sejam distintos. Dizemos que os autovalores  $\omega_n$  satisfazem uma relação de ressonância de ordem  $K$  se existir  $2n$  números  $k_n$  inteiros, diferentes de zero.

$$k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0, \quad |k_1| + \dots + |k_n| = K. \quad (5)$$

Dessa forma, após uma transformação canônica linear por intermédio dos autovalores associados, a Hamiltoniana normal de 2ª ordem  $H_2^{*}$  é dada por (Machuy, 2001; Vilhena de Moraes, 2009):

$$H_2^* = \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j}{2} (q_j^2 + p_j^2). \quad (6)$$

#### 3.2. Extensão da forma normal da Hamiltoniana para ordens superiores

Estendendo o processo de normalização da Hamiltoniana para ordens superiores ( $H_3^*$ ,  $H_4^*$ , ...), a Hamiltoniana normal em termos das variáveis  $q_j$  e  $p_j$  é expressa por Stuchi (2002) como:

$$H(q_j, p_j) = \sum_{j=1}^2 \frac{\omega_j}{2} (q_j^2 + p_j^2) + H_3^*(q_j, p_j) + H_4^*(q_j, p_j) + \dots \quad (7)$$

Para obter-se a Hamiltoniana normal de  $H_3^*$ ,  $H_4^*$ , ... é necessária a utilização do método de Lie-Hori. De acordo com Stuchi (2002), é conveniente que a Hamiltoniana normal seja escrita em variáveis complexas antes de usar tal método.

Essa mudança de variáveis é dada por:

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + iy_j), \\ p_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ix_j + y_j), \end{aligned} \quad (8)$$

com inversa dada por:

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_j - ip_j), \\ y_j &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-iq_j + p_j). \end{aligned} \quad (9)$$

Assim, a Hamiltoniana até a 4ª ordem nas variáveis complexas é representada por (Stuchi, 2002):

$$H^*(x_j, y_j) = \sum_{j=1}^2 i\omega_j x_j y_j + H_3^*(x_j, y_j) + H_4^*(x_j, y_j) + \dots \quad (10)$$

em que  $H_3^*(x_j, y_j)$  e  $H_4^*(x_j, y_j)$  podem ser expressos em uma forma compacta como:

$$H_3^*(x, y) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=3} h_{3,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (11)$$

$$H_4^*(x, y) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=4} h_{4,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (12)$$

que estão expressos em Cabette (2006) e em Formiga (2009) assumindo  $\alpha, \beta > 0$ .

Dessa forma temos a Hamiltoniana escrita em variáveis complexas, lembrando que  $H_2^*$  já se encontra normalizado. agora precisa-se aplicar o método de Lie-Hori para encontrarmos a forma normal para ordens superiores  $H_3^*(x, y)$ ,  $H_4^*(x, y)$ .

A forma normal é obtida da expansão da Hamiltoniana em série de Lie dada por (Hori, 1966; Ferraz-Mello, 2007).

$$H^{nova} = H^* + \{H^*, \mathcal{G}\} + \frac{1}{2!} \{\{H^*, \mathcal{G}\}, \mathcal{G}\} + \frac{1}{3!} \{\{\{H^*, \mathcal{G}\}, \mathcal{G}\}, \mathcal{G}\} + \dots \quad (13)$$

em que  $H^{nova}$  é a Hamiltoniana normal com termos em todas as ordens obtida através de transformações canônicas nas vizinhanças da identidade,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(x_j, y_j)$  é a função geratriz que também é considerada uma série de potência, em que cada grau de  $\mathcal{G}_n$  é uma soma de polinômios homogêneo de grau  $n$  e  $\{H^*, \mathcal{G}\}$  é o parênteses de Poisson de ordem  $r + s - 2$ , em que  $r$  e  $s$  representam a ordem dos polinômios  $H^*$  e  $\mathcal{G}$  respectivamente.

A nova Hamiltoniana  $H^{nova}$  após a transformação canônica nas vizinhanças da identidade pode ser expressa como (Vilhena de Moraes *et. al.*, 2009):

$$H^{nova} = H_2^{nova} + H_3^{nova} + H_4^{nova} + \dots \quad (14)$$

De modo que a nova Hamiltoniana, ordenada em grau, pode ser expressa seguindo a forma (Stuchi 2002; Ferraz-Mello 2007):

$$\text{Grau 2: } H_2^{nova} = H_2^*, \quad (15)$$

$$\text{Grau 3: } H_3^{nova} = H_3^* + \{H_2^*, G_3\}, \quad (16)$$

$$\text{Grau 4: } H_4^{nova} = H_4^* + \{H_3^*, G_3\} + \frac{1}{2!} \{\{H_2^*, G_3\}, G_3\} + \{H_2^*, G_4\}. \quad (17)$$

Este procedimento nos permite obter o número mínimo de monômios não ressonantes definidos em Machuy (2001), ou seja, a função geratriz  $\mathcal{G}_n$  é escolhida de modo a eliminar da Hamiltoniana total nas variáveis complexas (5.13) os monômios nos quais  $x_j$  e  $y_j$  tenham expoentes diferentes do grau desejado, restando apenas os monômios que carregam a ressonância intrínseca dos sistemas Hamiltonianos.

Dessa forma, tem-se a Hamiltoniana normal nas variáveis complexas separadas por grau como (Formiga, 2009):

$$\text{Grau 2: } H_2^{nova} = i\omega_1 x_1 y_1 + i\omega_2 x_2 y_2, \quad (18)$$

$$\text{Grau 3: } H_3^{nova} = 0, \quad (19)$$

$$\text{Grau 4: } H_4^{nova} = \delta_{11}(x_1 y_1)^2 + \delta_{12}(x_1 y_1 x_2 y_2) + \delta_{22}(x_2 y_2)^2, \quad (20)$$

em que  $\omega_j (j = 1, 2)$  é a parte imaginária dos autovalores associados a matriz definida pelo produto de uma matriz simplética de ordem 4 com a Hessiana da Hamiltoniana expandida em série de Taylor até 2ª ordem em torno do ponto de equilíbrio;  $\delta_{ij}$  são coeficientes reais obtidos da combinação dos  $h_{k,\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta (k = 3, 4)$ .

Porém para o estudo de estabilidade de Kovalev e Savchenko (1975) é necessário que a Hamiltoniana normal esteja em variáveis reais, assim aplica-se a mudança de variáveis da pela Eq. (9) e tem-se a Hamiltoniana normal no formato desejado expressa como (Cabette, 2006; Formiga, 2009):

$$\text{Grau 2: } H_2^{nova} = \frac{\omega_1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_2^2 + p_2^2), \quad (21)$$

$$\text{Grau 3: } H_3^{nova} = 0, \quad (22)$$

$$\text{Grau 4: } H_4^{nova} = \delta_{11}(q_1^4 + p_1^4 + 2q_1^2 p_1^2) + \delta_{12}(q_1^2 q_2^2 + q_1^2 p_2^2 + p_1^2 q_2^2 + p_1^2 p_2^2) + \delta_{22}(q_2^4 + p_2^4 + 2q_2^2 p_2^2), \quad (23)$$

em que  $\delta_{ij}$  são expressos analiticamente por Formiga (2009).

#### 4. FORMA NORMAL E O TEOREMA DE ESTABILIDADE DE KOVALEV E SAVCHENKO

Seja a Hamiltoniana  $H$  uma função analítica de coordenadas ( $q_v$ ) e momentos generalizados ( $p_v$ ) para um ponto  $P$  fixo. Sua forma normal representada por  $\mathcal{H}$  é expressa por:

$$\mathcal{H} = \sum_{v=1}^2 \frac{\omega_v}{2} \mathcal{R}_v + \sum_{v,m=1}^2 \frac{\delta_{v,m}}{4} \mathcal{R}_v \mathcal{R}_m + O_5, \quad (24)$$

em que  $O_5$  representa termos de ordem superior;  $\omega_v$  é a parte imaginária dos autovalores associados a matriz definida pelo produto de uma matriz simplética de ordem 4 com a Hessiana da Hamiltoniana expandida em série de Taylor até 2ª ordem em torno do ponto de equilíbrio (Cabette, 2006; Formiga, 2009);  $\delta_{v,m}$  dependem dos autovalores  $\omega_v$  e dos coeficientes da Hamiltoniana expandida em série de Taylor de 3ª e 4ª ordem em torno do ponto de equilíbrio que são apresentados analiticamente em (Formiga, 2009); e

$$\mathcal{R}_m = q_m^2 + p_m^2 \quad \text{com} \quad m = 1, 2 \quad (25)$$

A análise da estabilidade é aqui realizada através do teorema de Kovalev e Savchenko (1975) que garante que o movimento é Liapunov estável se as seguintes condições são satisfeitas:

- i. Os autovalores do sistema linear reduzido são imaginários puros  $\pm i\omega_1$  e  $\pm i\omega_2$ ;

ii. A condição

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \quad (26)$$

é válida para todo  $k_1$  e  $k_2$  inteiro satisfazendo a desigualdade.

$$|k_1| + |k_2| \leq 4 \quad (27)$$

iii. O determinante  $D$  deve satisfazer a desigualdade

$$D = -(\delta_{11}\omega_2^2 - 2\delta_{12}\omega_1\omega_2 + \delta_{22}\omega_1^2) \neq 0 \quad (28)$$

em que  $\delta_{v,v}$  são os coeficientes da Hamiltoniana normal de quarta ordem.

Assim, para analisarmos a estabilidade dos pontos de equilíbrio é necessário determinar os coeficientes  $\omega_v$  e  $\delta_{v,v}$  que são associados com a Hamiltoniana normal de segunda e quarta ordem como apresentado na Eq.(24).

## 5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Considerou-se um tipo de satélite: pequeno porte (PP), que possui características orbitais similares ao Satélite Brasileiro de Coleta de Dados SCD-1 (Kuga, 1999). Considerou o também em uma órbita circular, para simplificar a Hamiltoniana e as equações de movimento do problema.

A Tabela(1) a seguir, mostra um resumo quantitativo dos pontos de equilíbrio encontrados e de sua estabilidade, segundo o critério de Kovalev e Savchenko. Verifica-se que a condição de equilíbrio não linear não satisfeita, está relacionada com os autovalores com parte real não nula (não imaginários puros) ou com autovalores reais.

**Tabela 1. Resumo quantitativo da classificação dos pontos de equilíbrio**

Satélite	Total de pontos de equilíbrios	Pontos estáveis	Pontos instáveis		
PP-1	50	7	Falha na 1ª condição 43	Falha na 2ª condição 0	Falha na 3ª condição 0

Encontramos no total: 50 pontos de equilíbrios para o satélite PP-1 sendo apenas 7 Liapunov estáveis. Na Tab. (2) são apresentados os pontos de equilíbrio Liapunov estáveis encontrados nas simulações numéricas.

**Tabela 2. Pontos de equilíbrio Liapunov estáveis do satélite PP-1**

Pontos de equilíbrio	$L_1(kgkm^2/s)$	$L_2(kgkm^2/s)$	$L_3(kg km^2/s)$	$l_2(rad)$	$l_3(rad)$
PP-1 1.4	$5,8367 * 10^{-11}$	$4,0802 * 10^{-11}$	$1,9716 * 10^{-11}$	-0,00749	0,07
PP-1 4.3	$-2,675 * 10^{-6}$	$9,3596 * 10^{-6}$	$6,5103 * 10^{-6}$	0,007	0,9
PP-1 5.2	$2,3630 * 10^{-12}$	$1,8226 * 10^{-10}$	$9,2602 * 10^{-11}$	0,066484	0,4
PP-1 5.3	$2,4612 * 10^{-12}$	$1,6284 * 10^{-10}$	$8,2368 * 10^{-11}$	0,0658	0,4
PP-1 6.1	$2,6936 * 10^{-7}$	$2,0792 * 10^{-5}$	$1,0563 * 10^{-5}$	0,06656	0,4
PP-1 8.2	$4,3757 * 10^{-6}$	$1,8920 * 10^{-4}$	$9,4683 * 10^{-5}$	0,060383	0,4
PP-1 8.3	$2,7208 * 10^{-12}$	$1,5715 * 10^{-10}$	$7,9329 * 10^{-11}$	0,063797	0,4

Na Tabela 3 é apresentado para o ponto de equilíbrio Liapunov PP-1 1.4, os valores dos ângulos  $I_2, J_2$ , a velocidade de rotação  $w$  e o período de rotação  $T$ , sendo  $I_2$  o ângulo entre  $\vec{L}_2$  e o eixo equatorial Z,  $J_2$  o ângulo entre  $\vec{L}_2$  e o eixo do satélite z. Se os ângulos  $I_2$  e  $J_2$  forem nulos as variáveis de Andoyer  $\ell_1, \ell_2$  e  $\ell_3$  ficam indeterminadas.

**Tabela 3. Análise de possíveis singularidades para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4**

Ponto de equilíbrio do satélite PP-1				
Ponto de equilíbrio	$I_2(rad)$	$J_2(rad)$	$w(rad/s)$	$T(s)$
PP-1 1.4	2,20566	0,862451	0,00373909	1680,4

Tal análise foi realizada em todos os pontos de equilíbrio encontrados nas simulações realizadas.

## 6. ANÁLISE QUALITATIVA DE ESTABILIDADE EM TORNO DO PONTO DE EQUILÍBRIO

O comportamento na vizinhança do ponto de equilíbrio Liapunov estável PP-1 1.4, apresentada na seção anterior, foi estudado através de pequenas variações em três parâmetros: momento principal de inércia no eixo  $x$  ( $A$ ), momento principal de inércia no eixo  $z$  ( $C$ ) e inclinação orbital ( $I$ ).

Esta análise se justifica pela necessidade de se conhecer regiões de estabilidade associadas com variações de tais parâmetros que podem influenciar na estabilidade linear/ou estabilidade não linear do ponto de equilíbrio.

Dessa forma pode-se:

- Encontrar regiões em que esteja garantida a estabilidade linear segundo variações desses parâmetros;
- Tomar conhecimento sobre o comportamento do determinante de Arnold segundo variações desses parâmetros, ou seja, quão próximo este ponto estável pode estar da instabilidade não linear;

O estudo foi realizado seguindo o algoritmo apresentado Silva (2012), utilizado para determinação da forma normal e análise de estabilidade em que é necessário substituir os parâmetros constantes e o próprio ponto de equilíbrio em estudo na Hamiltoniana, lembrando que é necessário fazer uma substituição de variáveis para que o ponto de equilíbrio seja a nova origem do sistema e coordenadas.

Assim, com a Hamiltoniana em função de ( $A$ ,  $C$  e  $I$ ), pode-se verificar como o ponto de equilíbrios PP-1 1.4, que é Liapunov estável, se comportam com pequenas variações desses parâmetros por meio da análise qualitativa do teorema de estabilidade de Kovalev e Savchenko (1975)

Para cada um dos pontos de equilíbrios, são feitas as seguintes análises:

### 6.1. Comportamento da estabilidade linear

#### 6.1.1. Análise da 1ª condição

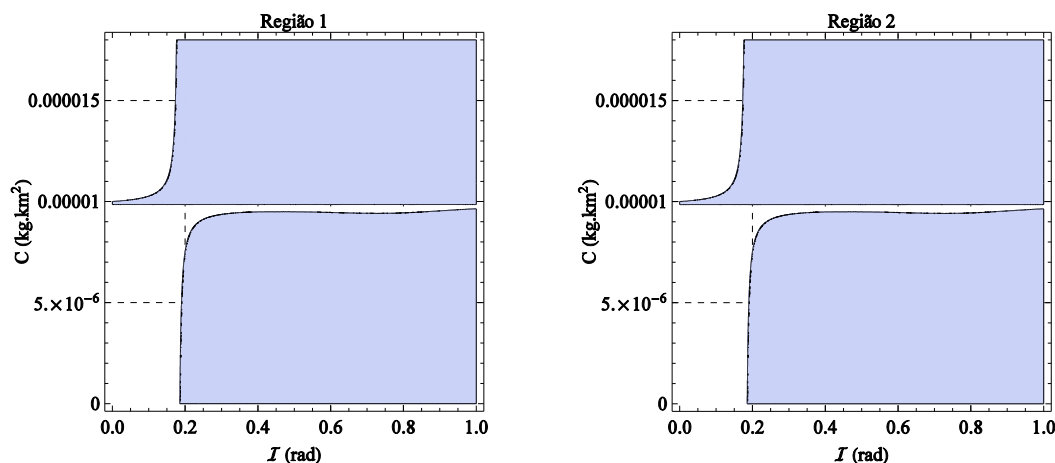
Como o desenvolvimento do algoritmo da forma normal e análise de estabilidade para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 em questão, obtêm-se resultados analíticos para os autovalores  $\lambda_j$  que são expressos como:

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{a(A, C, I)} \quad (29)$$

$$\lambda_2 = \pm \sqrt{b(A, C, I)} \quad (30)$$

Verificou-se para quais condições dos parâmetros  $A$ ,  $C$  e  $I$ , fazem com que as funções dentro das raízes ( $a(A, C, I)$  e  $b(A, C, I)$ ) sejam menores que zero. Nessa situação os autovalores são obrigatoriamente imaginários puros.

**Caso I:**  $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} \text{kg km}^2$



**Figura 2. Regiões para  $a(A_0, C, I) > 0$  e  $a(A_0, C, I) < 0$  e para  $b(A_0, C, I) > 0$  e  $a(A_0, C, I) < 0$ , considerando o momento principal de inércia  $A_0 = 3,9499 * 10^{-1} \text{kg km}^2$**

A Figura (2) apresenta o resultado da estabilidade linear para o momento principal de inércia  $A$  constante, com variações no momento principal de inércia  $C$  e na inclinação orbital  $I$ . Na Região 1 da Fig.(2), em azul, tem-se regiões em que  $a(A_0, C, I) < 0$  onde os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são imaginários puros. Na Região 2 da Fig.(2), em azul, tem-se regiões em que  $b(A_0, C, I) < 0$  onde os autovalores  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$  também são imaginários puros. Neste caso, observando as Regiões 1 e 2 pode-se determinar em que condições podemos variar os parâmetros  $I$  e  $C$ , para que seja garantida a estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-1 1.4.

Salienta-se que, em ambas as regiões, para o ponto de equilíbrio analisado, observaram-se que para os momentos principais de inércia são iguais ( $C = A$ ) temos instabilidade linear. Essa configuração corresponde a uma distribuição

uniforme de massa do satélite, ou seja, todos os momentos principais de inércia seriam iguais ( $A = B = C$ ). Nessa situação, o torque de gradiente de gravidade atuante no satélite se anula (ver Eq. (2)) e o movimento rotacional se caracteriza por um movimento livre de torques externos.

Outra característica observada, é que em baixas inclinações o ponto de equilíbrio PP-1 1.4 também se torna linearmente instável (ver Fig. (2)). Na Eq. (2), apresentada de forma completa em Silva (2012), verifica-se que para pequenas inclinações, a maioria dos termos da Hamiltoniana associada ao torque de gradiente de gravidade são eliminados. Assim, com os termos restantes da Eq. (2), a influência do torque de gradiente de gravidade gera instabilidade linear nessa configuração de inclinação orbital.

Além disso, pode se verificar que em todas as seis regiões, para a configuração original de  $A$ ,  $C$  e  $I$ , os autovalores são imaginários puros, confirmando o resultado obtido numericamente de estabilidade linear do ponto de equilíbrio PP-1 1.4.

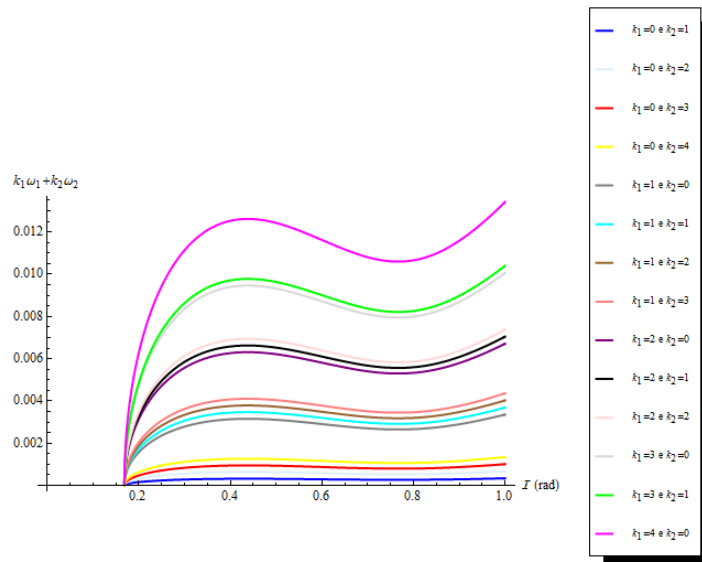
### 6.1.2. Análise da 2ª condição

Após essa primeira análise da estabilidade linear do ponto de equilíbrio em estudo, foi verificada se a inequação  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$  é válida para todos  $k_1$  e  $k_2$  inteiro satisfazendo a desigualdade  $|k_1| + |k_2| \leq 4$ . Ou seja, para que valores dos parâmetros em estudo  $A$ ,  $C$  e  $I$ , a inequação  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$  é satisfeita, lembrando que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são funções de  $a(A, C, I)$  e  $b(A, C, I)$  respectivamente, que são observados em:

$$\lambda_1 = \pm\sqrt{a(A, C, I)} = \pm i\omega_1 \tag{31}$$

$$\lambda_2 = \pm\sqrt{b(A, C, I)} = \pm i\omega_2 \tag{32}$$

**Caso I:**  $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg km^2$  e  $C_0 = 13 * 10^{-6} kg km^2$



**Figura 3. Segunda condição, analisando se a inequação  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$  é verdadeira para  $k_1 > 0$  e  $k_2 > 0$ , considerando  $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg km^2$  e  $C_0 = 13 * 10^{-6} kg km^2$**

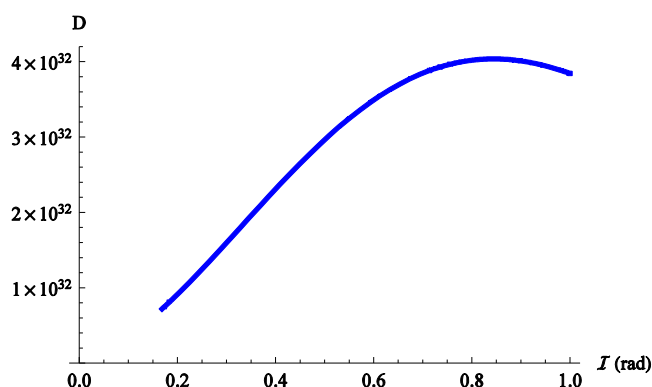
Analisando as curvas das Fig. (3) percebe-se que a 2ª condição do teorema de Kovalev e Savchenko é satisfeita para  $I > 0,1651 rad$ , ou seja, para diferentes valores de  $k_1$  e  $k_2$  inteiro sempre obedecendo a relação  $|k_1| + |k_2| \leq 4$ , temos  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0$  para  $I > 0,1651 rad$ , resultado já esperado, pois para ser garantida a estabilidade linear os autovalores além de serem imaginários puros devem ser não ressonantes entre si.

### 6.2. Comportamento da estabilidade não linear

Esse tópico consiste na análise da 3ª condição, verifica-se o determinante de Arnold  $D$  satisfaz a desigualdade em função dos parâmetros em estudo  $A$ ,  $C$  e  $I$ .

**Caso I:**  $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg km^2$  e  $C_0 = 13 * 10^{-6} kg km^2$

Na Figura (4), observa-se que com essa configuração de  $A$  e  $C$ , não existem inclinações que conduzem o determinante de Arnold a zero, para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4, isso dentro do limite imposto pela 1ª e 2ª condição para valores de inclinação, ou seja, para esses valores de inclinação o ponto de equilíbrio em estudo é Liapunov estável.



**Figura 4. Determinante de Arnold em função da inclinação orbital  $I$  considerando  $A_0 = 9,855 * 10^{-6} kg km^2$  e  $C_0 = 13 * 10^{-6} kg km^2$**

Para o intervalo  $0 < I < 0,1651 rad$ , não temos solução para o determinante de Arnold, pois com essa configuração os autovalores são reais ou não imaginários puros, que corresponde a não existência de estabilidade linear, como já visto anteriormente de acordo com as Fig.(2) e Fig. (3). Para  $I > 0,1651 rad$  o determinante de Arnold apresenta resultados diferentes de zero.

## 7. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma análise semianalítica da estabilidade do movimento rotacional considerando a influência do torque de gradiente de gravidade para um satélite simétrico em órbita circular. As aplicações foram realizadas para um satélite de pequeno porte (PP) utilizando o software MATHEMATICA.

Inicialmente os pontos de equilíbrios foram determinados utilizando as características físicas, orbitais e de atitude de cada satélite. A seguir o algoritmo para a análise da estabilidade foi aplicado tendo sido obtidos 7 pontos estáveis para o satélite de PP-1.

Para os satélites PP-1 foram obtidos mais pontos de equilíbrios do que os 50 apresentados, porém muitos deles foram descartados por levarem a condição de singularidade nas variáveis de Andoyer.

Em comparação com os resultados de Vilhena de Moraes *et. al* (2009) e Cabette (2006), os quais mostram a análise da estabilidade do movimento rotacional com o torque de gradiente de gravidade, mas com satélite em órbita com pequena excentricidade, um número maior de pontos de equilíbrio estáveis foi determinado. Em termos da determinação da forma normal e da análise da estabilidade houve uma otimização no algoritmo, possibilitada pela utilização dos resultados obtidos por Formiga (2009) para os coeficientes da Hamiltoniana normal de quarta ordem.

Na análise qualitativa de estabilidade em torno do ponto de equilíbrio PP-1 1.4 foram observados os seguintes resultados.

Com relação à estabilidade linear para o ponto de equilíbrio PP-1 1.4, observou-se que existe uma instabilidade linear quando os momentos principais de inércias são iguais ( $C = A$ ). Isso corresponde a uma distribuição uniforme de massa do satélite, ou seja, todos os momentos principais de inércia seriam iguais ( $A = B = C$ ).

Nessa situação, o torque de gradiente de gravidade atuante no satélite se anula e o movimento rotacional se caracteriza por um movimento livre de torques externos, com o eixo principal de inércia  $Oz$  tendo movimento de precessão em torno do eixo de maior momento angular de rotação  $Oz_m$  (Zanardi, 1983).

Para diferentes valores de momentos principais de inércia ( $C \neq A$ ), o ponto de equilíbrio apresentou estabilidade linear para a grande maioria dessas configurações, a exceção é feita para órbitas de baixa inclinação, que torna o ponto de equilíbrio linearmente instável. Nessa configuração, verifica-se que a maioria dos termos da Hamiltoniana associada ao torque de gradiente de gravidade são eliminados, porém, com os termos restantes, a influência do torque externo gera instabilidade linear para esse ponto de equilíbrio.

Com relação à estabilidade não linear do ponto de equilíbrio PP-1 1.4, verificou-se que os resultados coincidiram com a região delimitada pela 1ª e 2ª condição do teorema estudado relacionado com a estabilidade linear.

Portanto, a abordagem aqui realizada para a análise de estabilidade de satélites artificiais simétricos e em órbita circular, mostra-se adequada para análise de missões espaciais.

Salienta-se que o lançamento do satélite nas regiões de estabilidade determinadas, pode contribuir diretamente na manutenção da atitude de satélites artificiais, podendo gerar uma economia de combustível através de um menor número de manobras de atitude para manter a atitude desejada da missão espacial.

## 8. AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES e CNPq.

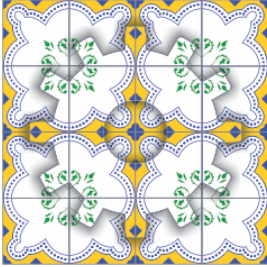


## 9. REFERÊNCIAS

- Cabette, R. E. S., 2006, “Estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais”. Tese de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.
- Ferraz-Mello, S. 2007, “Canonical perturbation theories-degenerate systems and resonance”. Springer, New York.
- Formiga, J. K., 2009, “Formas normais no estudo da estabilidade para  $L_4$  no problema fotogravitacional”. Tese de doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.
- Hori, G., 1966, “Theory of general perturbations with unspecified canonical variables”. Publ. Astron. Soc. Jap. 18, 287 – 299.
- Kinoshita, H., 1972, “First order perturbation of the two finite body problems”. Publ. Astron. Soc. Japan. 24, 423 – 439.
- Kovalev, A. M.; Savchenko, A. Ia., 1975, “Stability of uniform rotations of a rigid body about a principal axis”. PMM, v. 39, n. 4, 650 – 660.
- Kuga, H. K.; Orlando, V.; Lopes, R. V. F., 1999, “Flight dynamics operations during leap for the INPE’s second environmental data collecting satellite SCD 2”. RBCM J. Brazilian Soc. Mech. Sci., 21, 339 – 344.
- Machuy, A. L. F., 2001, “Cálculo efetivo da forma normal parcial para o problema de Hill”. 2001. 71p. Dissertação de mestrado-instituto de matemática, UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Silva, W. R., 2012, “Estudo da estabilidade do movimento rotacional de satélites artificiais com variáveis canônicas”. Dissertação de mestrado, UNESP – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, S.P.
- Stuchi, T. J., 2002, “KAM tori in the center manifold of the 3-D Hill problem,” Advanced in Space Dynamics, O.C. Winter, A. F. B. Prado editors, Vol. 2, pp. 112-127, INPE, São José dos Campos, SP, Brasil.
- Vilhena de Moraes, R.; Cabette, R. E. S.; Zanardi, M. C.; Stuchi, T. J.; Formiga, J. K., 2009, “Attitude stability of artificial satellites subject to gravity gradient torque”. Celes. Mech., 104, 337 – 353.
- Zanardi, M. C., 1986, “Study of the terms of coupling between rotational and translational motion”. Celes. Mech. 39(2), 147 – 164.
- Zanardi, M. C., 1983, “Movimento rotacional e translacional acoplado de satélites artificiais”. Dissertação de mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos.

## 10. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluídos neste trabalho.



## STABILITY REGIONS OF ROTATIONAL MOTION OF ARTIFICIAL SATELLITES IN THE PRESENCE OF THE GRAVITY GRADIENT TORQUE

William Reis Silva, [reis.william@gmail.com](mailto:reis.william@gmail.com)<sup>1</sup>  
Maria Cecília F. P. S. Zanardi, [cecilia@feg.unesp.br](mailto:cecilia@feg.unesp.br)<sup>2</sup>  
Jorge Kennety S. Formiga, [jkennety@yahoo.com.br](mailto:jkennety@yahoo.com.br)<sup>3</sup>  
Regina Elaine S. Cabette, [recabette@uol.com.br](mailto:recabette@uol.com.br)<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Space Mechanic and Control Division, National Institute for Space Research (INPE), São José dos Campos, 12227-010, SP, Brazil.

<sup>2</sup>Group of Orbital Dynamics and Planetology, São Paulo State University (UNESP), Guaratinguetá, 12516-410, SP, Brazil.

<sup>3</sup>Department of Aircraft Maintenance and Aeronautical Manufacturing, Faculty of TechnologyTecnologia (FATEC), São José dos Campos, 12247-004, SP, Brasil.

<sup>4</sup>São Paulo Salesian University(UNISAL), Lorena, 12600-100, SP, Brazil.

**Abstract.** *This work aims to analyze the stability of the rotational motion of symmetrical artificial satellite (with two principal moments of inertia equal), in circular orbit with the influence of gravity gradient torque, using the variables of Andoyer. The used method in this paper to analyze stability is the Kovalev-Savchenko theorem, which requires the reduction of the Hamiltonian in its normal form up to fourth order by means of canonical transformations around equilibrium points. The coefficients of the normal Hamiltonian are indispensable in the study of nonlinear stability of its equilibrium points according the three established conditions in the theorem. Applications were made to satellites of small size, with data similar to the first Brazilian Satellite Data Collection - SCD1 using the software MATHEMATICA. Several stable equilibrium points were determined and regions around these equilibrium points have been established by variations in orbital inclination and the principal moments of inertia of the satellite. In comparison with previous results show a larger number of equilibrium points and an optimization, in algorithm determining the normal form in the stability analysis, due the possibility of inclusion of analytical calculation of the coefficients of the normal Hamiltonian of 4th order. Thus, the uses of variables Andoyer are adequate for the stability analysis of rotational motion, which can be useful for the analysis of space missions. It is important to point out that, the launch of the satellite instability regions can contribute to the maintenance of the satellite attitude, which can generate a fuel economy through lower number of attitude maneuvers to maintain desired attitude of the mission.*

**Keywords:** *Rotational motion, stability, artificial satellites.*

### 1. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.