

Generalized Average Modeling of Dual Active Bridge DC–DC Converter

Modelagem de Conversores

Everson Mattos
Professor: Cassiano Rech

Universidade Federal de Santa Maria

Santa Maria, 03 de Novembro de 2014

- Apresentar o primeiro seminário sobre modelagem de conversores.

Sumário

- 1 introdução ao conversor *Dual Active Bridge* (DAB);
- 2 Introdução a modelagem usando a técnica do modelo médio generalizado;
- 3 Modelagem do DAB usando o modelo médio generalizado;
- 4 Simulações;
- 5 Resultados.

A figura abaixo mostra um conversor *Dual Active Briagde* típico.

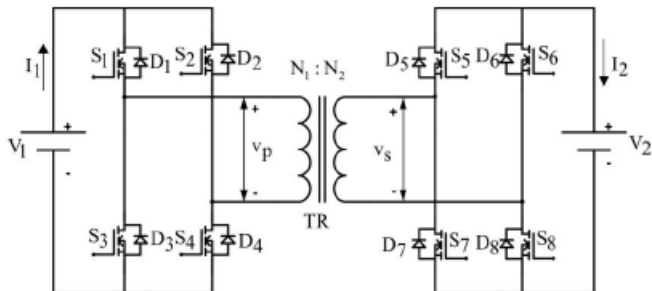


Figure : Conversor *DAB* típico [8]

A figura a seguir mostra as Etapas de funcionamento do conversor *DAB*.

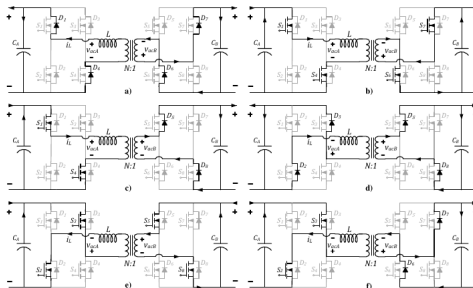


Figura 2.19 – Etapas de operação do DAB em *phase-shift*. a) Modo I. b) Modo II. c) Modo III. d) Modo IV. e) Modo V. f) Modo VI.

Figure : Etapas de Funcionamento *DAB* [7]

Funcionamento do *DAB*

O *DAB* atua com conversor CC-CA e CA-CC, as principais formas de onda pode ser vistas a seguir. Observa-se que $\langle i_L \rangle = 0$.

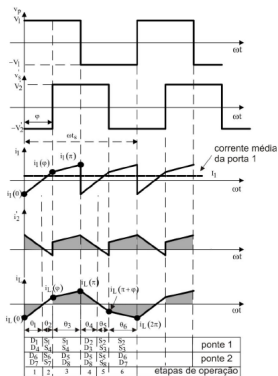


Figure : Formas de onda do *DAB* [8]

O fluxo de potência do conversor depende da defasagem entre as tensões do primário e do secundário, a isso chama-se de *Phase-shift-modulation*. A figura abaixo mostra as formas de onda do primário, do secundário e a corrente no transformador:

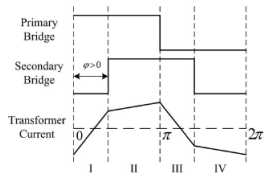


Figure : Phase Shift Modulation [1]

- É uma metodologia para a modelagem pela média de circuitos chaveados, generalizada, com precisão estendida de maneira arbitrária a ordens mais elevadas da série de Fourier [9];
- A idéia básica do método é representar a variável de estado $x(\tau)$ no intervalo $t - T \leq \tau \leq t$, por sua Série de Fourier, Equação (1), tão preciso quanto se queira[1]-[4].

$$x(\tau) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kw_s t + \phi_k) \quad (1)$$

ou

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle x \rangle_k(t) e^{jkw_s \tau}$$

Os coeficiente da serie de Fourier e mostrado na equação (2):

$$\langle x \rangle_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_s \tau} d\tau \quad (2)$$

- A derivada em relação ao tempo do coeficientes da serie de Fourier estão na equação (3) [1]-[4]

$$\frac{d\langle x \rangle_k(t)}{dt} = \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle_k(t) - jk\omega_s \langle x \rangle_k(t) \quad (3)$$

A Equação (3) pode ser simplificada para circuitos chaveados e fica [2]:

$$\frac{d\langle x \rangle_k(t)}{dt} = -jk\omega_s \langle x \rangle_k(t) + \langle f(x, u) \rangle_k(t) \quad (4)$$

- Assim, a Equação (3) pode ser escrita para circuitos lineares [3][4] como:

$$\langle v_R \rangle_k(t) = R \langle i_R \rangle_k(t) \quad (5)$$

- A equação do indutor fica:

$$\langle v_L \rangle_k(t) = L \langle i_L \rangle_k(t) - jk\omega_s L \langle i_L \rangle_k(t) \quad (6)$$

- A equação do capacitor fica:

$$\langle i_C \rangle_k(t) = C \langle v_C \rangle_k(t) - jk\omega_s C \langle v_C \rangle_k(t) \quad (7)$$

Sejam dois sinais reais quaisquer $q(t)$ e $x(t)$, a Série de Fourier do produto de seus valores médios é dada na Equação (8)[4]:

$$\langle xq \rangle_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle x \rangle_{k-i} \langle q \rangle_i(t) \quad (8)$$

A aproximação dos sinais usando a Serie de Fourier apenas para os valores (valor CC + primeira harmônica) são mostradas nas Equações (9) (10)

$$q(t) \cong \langle q \rangle_0 + \langle q \rangle_1 e^{j\omega_s t} + \langle q \rangle_{-1} e^{-j\omega_s t} \quad (9)$$

$$x(t) \cong \langle x \rangle_0 + \langle x \rangle_1 e^{j\omega_s t} + \langle x \rangle_{-1} e^{-j\omega_s t} \quad (10)$$

Aplicando a Equação (8) na multiplicação dos dois sinais, resulta na Equação (11)

$$\begin{aligned} \langle xq \rangle_0 &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_0 + \langle x \rangle_{-1} \langle q \rangle_1 \\ &+ \langle x \rangle_1 \langle q \rangle_{-1} \\ \langle xq \rangle_1 &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_1 + \langle q \rangle_1 \langle q \rangle_0 \\ \langle xq \rangle_{-1} &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_{-1} + \langle q \rangle_{-1} \langle q \rangle_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Normalmente os valores de $\langle x \rangle_1$ e $\langle q \rangle_{-1}$ são números complexos e pode ser escritos como segue:

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_1 &= \langle q \rangle_1^R + j \langle q \rangle_1^I \\ \langle q \rangle_{-1} &= \langle q \rangle_1^R - j \langle q \rangle_1^I \end{aligned} \quad (12)$$

e,

$$\begin{aligned}\langle q \rangle_1 &= \langle q \rangle_1^R + j \langle q \rangle_1^I \\ \langle q \rangle_{-1} &= \langle q \rangle_1^R - j \langle q \rangle_1^I\end{aligned}\quad (13)$$

nota-se que:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_{-1} &= (\langle x \rangle_1)^* \\ \langle q \rangle_{-1} &= (\langle q \rangle_1)^*\end{aligned}\quad (14)$$

onde R e I são a parte real e imaginária respectivamente e $*$ é o complexo conjugado. Pode-se, usando as Equações (13) e (14) simplificar as relações da Equação (11)

$$\begin{aligned}\langle xq \rangle_0 &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_0 + (\langle q \rangle_1^R - j \langle q \rangle_1^I)(\langle x \rangle_1^R + j \langle x \rangle_1^I) \\ &+ (\langle q \rangle_1^R + j \langle q \rangle_1^I)(\langle x \rangle_1^R - j \langle x \rangle_1^I) \\ &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_0 + 2 \langle q \rangle_1^R \langle x \rangle_1^R + 2 \langle q \rangle_1^I \langle x \rangle_1^I\end{aligned}\quad (15)$$

$$\langle xq \rangle_1 = \langle q \rangle_2 \langle x \rangle_{-1} + \langle q \rangle_1 \langle x \rangle_0 + \langle q \rangle_0 \langle x \rangle_1 \quad (16)$$

O termo $\langle q \rangle_2 \langle x \rangle_{-1}$ é desprezado. Separando-se a Equação (16) em sua parte Real e Imaginária tem-se:

$$\begin{aligned} \langle xq \rangle_1^R &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_1^R + \langle q \rangle_0 \langle x \rangle_1^R \\ \langle xq \rangle_1^I &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_1^I + \langle q \rangle_0 \langle x \rangle_1^I \end{aligned} \quad (17)$$

O resultado é similar para o complexo conjugado da Equação (16)

$$\begin{aligned} \langle xq \rangle_{-1}^R &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_{-1}^R + \langle q \rangle_0 \langle x \rangle_{-1}^R \\ \langle xq \rangle_{-1}^I &= \langle x \rangle_0 \langle q \rangle_{-1}^I + \langle q \rangle_0 \langle x \rangle_{-1}^I \end{aligned} \quad (18)$$

A Figura abaixo mostra o circuito do DAB simplificado para análise.

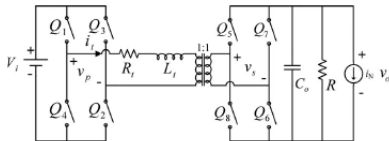
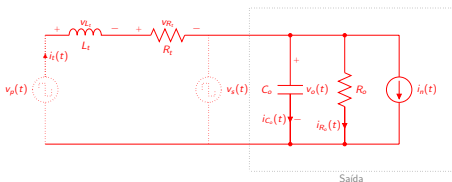


Figure : DAB Simplificado para análise

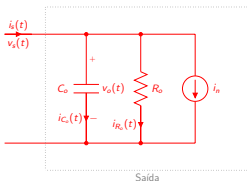
Nota-se que v_p assume dois valores possíveis num período de chaveamento V_i e $-V_i$ de acordo com o fechamento das chaves da ponte primária Q_1 e Q_2 , Q_3 e Q_4 respectivamente. De modo semelhante v_s assume dois valores V_o e $-V_o$ dependendo de quais chaves estão conectadas na ponte do secundário Q_5 e Q_6 , Q_7 e Q_8 respectivamente.

O circuito abaixo mostra o DAB em diagrama esquemático simplificado.



onde

$$\begin{aligned}
 v_p &= v_i(t)v_1(t) \\
 v_s &= v_o(t)v_2(t) \\
 i_s &= i_t v_2(t) \\
 -v_p(t) + v_L(t) + R_t i_t(t) + v_s(t) &= 0 \\
 v_L(t) &= \frac{di_L(t)}{dt} \\
 L_t \frac{di_L(t)}{dt} &= v_p(t) - v_s(t) - R_t i_t(t)
 \end{aligned} \tag{19}$$



onde

$$\begin{aligned}i_s(t) &= i_c(t) + i_{R_o}(t) + i_n \\i_c(t) &= C \frac{dv_c(t)}{dt} \\C_o \frac{dv_o(t)}{dt} &= i_s(t) - i_n - i_{R_o}(t) \\C_o \frac{dv_o(t)}{dt} &= s_2(t)i_t(t) - i_n - \frac{v_o(t)}{R_o}\end{aligned} \quad (20)$$

As equações dinâmicos do circuito no são:

$$\begin{aligned} L_t \frac{di_t(t)}{dt} &= v_i(t)v_1(t) - v_o(t)v_2(t) - R_t i_t(t) \\ C_o \frac{dv_o(t)}{dt} &= v_2(t)i_t(t) - i_n - \frac{v_o(t)}{R_o} \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando (4) em (21) e as Equações de (11) a (18), fica:

$$L_t \frac{d\langle i_t \rangle_k(t)}{dt} = -jk\omega_s \langle i_t \rangle_k(t) + \langle v_i v_1 \rangle_k(t) - \langle v_o v_2 \rangle_k(t) - R_t \langle i_t \rangle_k(t) \quad (22)$$

$$C_o \frac{d\langle v_o \rangle_k(t)}{dt} = -jk\omega_s \langle v_o \rangle_k(t) + \langle v_2 i_t \rangle_k(t) - \langle i_n \rangle_k(t) - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_k(t) \quad (23)$$

Aplicando a expansão pela Série o resultado de (4), fazendo $k = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} L_t \frac{d\langle i_t \rangle_0}{dt} &= \langle v_i \rangle_0 \langle v_1 \rangle_0 - \langle v_o \rangle_0 \langle v_2 \rangle_0 - R_t \langle i_t \rangle_0 \\ L_t \frac{d\langle i_t \rangle_0}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_0 + \langle v_i \rangle_0 \langle v_1 \rangle_0 + 2\langle v_i \rangle_1^R \langle v_1 \rangle_1^R + 2\langle v_i \rangle_1^I \langle v_1 \rangle_1^I - \\ &\langle v_o \rangle_0 \langle v_2 \rangle_0 - 2\langle v_o \rangle_1^R \langle v_2 \rangle_1^R - 2\langle v_o \rangle_1^I \langle v_2 \rangle_1^I \end{aligned} \quad (24)$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1}{dt} &= -j\omega_s \langle i_t \rangle_1 + \langle v_i v_1 \rangle_1 - \langle v_o v_2 \rangle_1 - R_t \langle i_t \rangle_1 \\
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1}{dt} &= -j\omega_s \langle i_t \rangle_1 + \langle v_i v_1 \rangle_1 - \langle v_o v_2 \rangle_1 - R_t \langle i_t \rangle_1 \\
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^R - R_t \langle i_t \rangle_1^I - j\omega_s \langle i_t \rangle_1^R - j\omega_s \langle i_t \rangle_1^I \\
 &+ \langle v_i \rangle_0 \langle v_1 \rangle_1^R + \langle v_i \rangle_1^R \langle v_1 \rangle_0 - \langle v_o \rangle_0 \langle v_2 \rangle_1^R - \langle v_o \rangle_1^R \langle v_2 \rangle_0 \\
 &+ \langle v_i \rangle_0 \langle v_1 \rangle_1^I + \langle v_i \rangle_1^I \langle v_1 \rangle_0 - \langle v_o \rangle_0 \langle v_2 \rangle_1^I - \langle v_o \rangle_1^I \langle v_2 \rangle_0
 \end{aligned} \tag{25}$$

Separando a parte Real e Imaginária, fica:

$$\begin{aligned}
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1^R}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^R + \omega_s \langle i_t \rangle_1^I + \langle v_i \rangle_0 \langle v_1 \rangle_1^R + \langle v_i \rangle_1^R \langle v_1 \rangle_0 - \langle v_o \rangle_0 \langle v_2 \rangle_1^R - \langle v_o \rangle_1^R \langle v_2 \rangle_0 \\
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1^I}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^I - \omega_s \langle i_t \rangle_1^R + \langle v_i \rangle_0 \langle v_1 \rangle_1^I + \langle v_i \rangle_1^I \langle v_1 \rangle_0 - \langle v_o \rangle_0 \langle v_2 \rangle_1^I - \langle v_o \rangle_1^I \langle v_2 \rangle_0
 \end{aligned} \tag{26}$$

Da mesma forma resolvendo a da Equação (23) para $k = 0$ e $k = 1$:

$$\begin{aligned}
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_0}{dt} &= \langle v_2 i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_0 - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_0 \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_0}{dt} &= \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_0 + 2\langle v_2 \rangle_1^R \langle i_t \rangle_1^R + 2\langle v_2 \rangle_1^I \langle i_t \rangle_1^I - \langle i_n \rangle_0 - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_0 \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1}{dt} &= -j\omega_s \langle v_o \rangle_1 + \langle v_2 i_t \rangle_1 - \langle i_n \rangle_1 - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1 \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1}{dt} &= -j\omega_s \langle v_o \rangle_1^R + \omega_s \langle v_o \rangle_1^I + \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_1^R + \langle v_2 \rangle_1^R \langle i_t \rangle_0 + \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_1^I + \langle v_2 \rangle_1^I \langle i_t \rangle_0 \\
 &\quad - \langle i_n \rangle_1^R - \langle i_n \rangle_1^I - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^R - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^I \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1^R}{dt} &= +\omega_s \langle v_o \rangle_1^I + \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_1^R + \langle v_2 \rangle_1^R \langle i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_1^R - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^R \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1^I}{dt} &= -\omega_s \langle v_o \rangle_1^R + \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_1^I + \langle v_2 \rangle_1^I \langle i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_1^I - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^I
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_0}{dt} &= \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_0 + 2\langle v_2 \rangle_1^R \langle i_t \rangle_1^R + 2\langle v_2 \rangle_1^I \langle i_t \rangle_1^I - \langle i_n \rangle_0 - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_0 \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1^R}{dt} &= +\omega_s \langle v_o \rangle_1^I + \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_1^R + \langle v_2 \rangle_1^R \langle i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_1^R - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^R \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1^I}{dt} &= -\omega_s \langle v_o \rangle_1^R + \langle v_2 \rangle_0 \langle i_t \rangle_1^I + \langle v_2 \rangle_1^I \langle i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_1^I - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^I
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} L_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_o \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2\langle v_1 \rangle_1^R & 2\langle v_1 \rangle_1^I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle v_1 \rangle_1^R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\langle v_1 \rangle_1^I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_t & 0 & 0 & \langle v_2 \rangle_0^R & -2\langle v_2 \rangle_1^R & -2\langle v_2 \rangle_1^I \\ 0 & -R_t & w_s & -\langle v_2 \rangle_1^R & -\langle v_2 \rangle_0 & 0 \\ 0 & -w_s & -R_t & -\langle v_2 \rangle_1^I & 0 & -\langle v_2 \rangle_0 \\ \langle v_2 \rangle_0 & 2\langle v_2 \rangle_1^R & 2\langle v_2 \rangle_1^I & -\frac{1}{R_o} & 0 & 0 \\ \langle v_2 \rangle_1^R & \langle v_2 \rangle_0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_o} & 0 \\ \langle v_2 \rangle_1^I & 0 & \langle v_2 \rangle_0 & 0 & -w_s & -\frac{1}{R_o} \end{bmatrix}$$

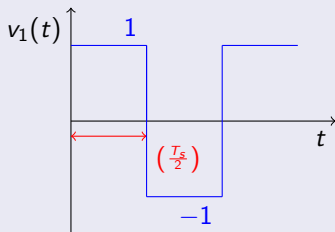
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \langle \dot{i}_t \rangle_0^R \\ \langle \dot{i}_t \rangle_1^R \\ \langle \dot{i}_t \rangle_1^I \\ \langle \dot{v}_o \rangle_0^R \\ \langle \dot{v}_o \rangle_1^R \\ \langle \dot{v}_o \rangle_1^I \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_0^R \\ \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1^I \\ \langle v_o \rangle_0^R \\ \langle v_o \rangle_1^R \\ \langle v_o \rangle_1^I \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \langle v_i \rangle_0^R \\ \langle v_i \rangle_1^R \\ \langle v_i \rangle_1^I \\ \langle i_n \rangle_0^R \\ \langle i_n \rangle_1^R \\ \langle i_n \rangle_1^I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_0^R \\ \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1^I \\ \langle v_o \rangle_0^R \\ \langle v_o \rangle_1^R \\ \langle v_o \rangle_1^I \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

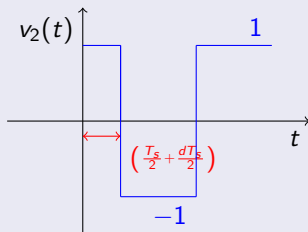
$$\mathbf{E} = [0] \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_0^R \\ \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1^I \\ \langle v_o \rangle_0^R \\ \langle v_o \rangle_1^R \\ \langle v_o \rangle_1^I \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \langle v_i \rangle_0^R \\ \langle v_i \rangle_1^R \\ \langle v_i \rangle_1^I \\ \langle i_n \rangle_0^R \\ \langle i_n \rangle_1^R \\ \langle i_n \rangle_1^I \end{bmatrix}$$

Faz-se necessário encontrar a representação em série de Fourier dos sinais v_1 e v_2 . Esses sinais são periódicos, de período T_s , conforme as figuras abaixo, o cálculo dos coeficientes estão no Anexo I:



$$\begin{aligned}\langle v_1 \rangle_0 &= 0 \\ \langle v_1 \rangle_1^R &= 0 \\ \langle v_1 \rangle_1^I &= -\frac{2}{\pi}\end{aligned}\quad (29)$$



$$\begin{aligned}\langle v_2 \rangle_0 &= 0 \\ \langle v_2 \rangle_1^R &= -2 \frac{\sin(d\pi)}{\pi} \\ \langle v_2 \rangle_1^I &= -2 \frac{\cos(d\pi)}{\pi}\end{aligned}\quad (30)$$

Ainda, considerando as simplificações dadas pela referência [1], tem-se.

- Considera-se que as dinâmicas da entrada $v_i(t)$ e da carga $v_o(t)$ são muito menores do que a frequência de chaveamento;
- Considera-se também que $\langle v_i \rangle_0 = V_i$ e $\langle i_n \rangle_0 = i_n$. O que implica em $\langle v_i \rangle_1^R = \langle v_i \rangle_1^I = 0$ e $\langle i_n \rangle_1^R = \langle i_n \rangle_1^I = 0$
- Para condições iniciais nulas tem-se que $\langle i_t \rangle_0 = 0$, $\langle v_o \rangle_1^R = 0$ e $\langle v_o \rangle_1^I = 0$. Isso implica que as equações dinâmicas dessas variáveis são zero [1].

Inicialmente:

$$\begin{aligned}
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_0}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_0 + 2 \langle v_o \rangle_1^R \left(-\frac{2}{\pi} \text{sen}(d\pi)\right) - 2 \langle v_o \rangle_1^I \left(-\frac{2}{\pi} \text{cos}(d\pi)\right) \\
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1^R}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^R + \omega_s \langle i_t \rangle_1^I - \langle v_o \rangle_0 \left(-\frac{2}{\pi} \text{sen}(d\pi)\right) \\
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1^I}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^I - \omega_s \langle i_t \rangle_1^R + \langle v_i \rangle_0 \left(-\frac{2}{\pi}\right) - \langle v_o \rangle_0 \left(-\frac{2}{\pi} \text{cos}(d\pi)\right) \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_0}{dt} &= -2 \frac{\text{sen}(d\pi)}{\pi} \langle i_t \rangle_1^R - 2 \frac{\text{cos}(d\pi)}{\pi} \langle i_t \rangle_1^I - \langle i_n \rangle_0 - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_0 \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1^R}{dt} &= +\omega_s \langle v_o \rangle_1^I - 2 \frac{\text{sen}(d\pi)}{\pi} \langle i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_1^R - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^R \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_1^I}{dt} &= -\omega_s \langle v_o \rangle_1^R - 2 \frac{\text{cos}(d\pi)}{\pi} \langle i_t \rangle_0 - \langle i_n \rangle_1^I - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_1^I
 \end{aligned} \tag{31}$$

Levando em consideração as simplificações reescreve-se as equações dinâmicas do modelo como:

$$\begin{aligned}
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1^R}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^R + \omega_s \langle i_t \rangle_1^I - \langle v_o \rangle_0 \left(-\frac{2}{\pi} \text{sen}(d\pi)\right) \\
 L_t \frac{d\langle i_t \rangle_1^I}{dt} &= -R_t \langle i_t \rangle_1^I - \omega_s \langle i_t \rangle_1^R + \langle v_i \rangle_0 \left(-\frac{2}{\pi}\right) - \langle v_o \rangle_0 \left(-\frac{2}{\pi} \text{cos}(d\pi)\right) \\
 C_o \frac{d\langle v_o \rangle_0}{dt} &= -2 \frac{\text{sen}(d\pi)}{\pi} \langle i_t \rangle_1^R - 2 \frac{\text{cos}(d\pi)}{\pi} \langle i_t \rangle_1^I - i_n - \frac{1}{R_o} \langle v_o \rangle_0
 \end{aligned} \tag{32}$$

Forma Matricial Simplificada

$$\begin{bmatrix} L_t & 0 & 0 \\ 0 & L_t & 0 \\ 0 & 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1 \\ \langle v_o \rangle_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_t & w_s & -\langle v_2 \rangle_1^R \\ -w_s & -R_t & -\langle v_2 \rangle_1 \\ 2\langle v_2 \rangle_1^R & 2\langle v_2 \rangle_1 & -\frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1 \\ \langle v_o \rangle_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \langle v_1 \rangle_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ i_n \end{bmatrix}$$

ou, substituindo os valores de v_2 e v_1 fica:

$$\begin{bmatrix} L_t & 0 & 0 \\ 0 & L_t & 0 \\ 0 & 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1 \\ \langle v_o \rangle_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_t & w_s & 2/\pi \operatorname{sen}(d\pi) \\ -w_s & -R_t & 2/\pi \operatorname{cos}(d\pi) \\ -4/\pi \operatorname{sen}(d\pi) & -4/\pi \operatorname{cos}(d\pi) & -\frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle i_t \rangle_1^R \\ \langle i_t \rangle_1 \\ \langle v_o \rangle_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2/\pi & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ i_n \end{bmatrix}$$

Perturbando e Linearizando

$$\begin{aligned}\langle d \rangle &= \hat{d} + D \\ \langle \hat{v}_i \rangle_0 &= \langle \hat{v}_i \rangle_0 + \langle V_i \rangle_0 \\ \langle \hat{i}_t \rangle_1^R &= \langle \hat{i}_t \rangle_1^R + \langle I_t \rangle_1^R \\ \langle \hat{i}_t \rangle_1^I &= \langle \hat{i}_t \rangle_1^I + \langle I_t \rangle_1^I \\ \langle \hat{v}_o \rangle_0 &= \langle \hat{v}_o \rangle_0 + \langle V_o \rangle_0\end{aligned}$$

substituindo nas equações dinâmicas (32) e considerando $T_s = 2\pi$, tem-se:

$$C_o \frac{d(\langle \hat{v}_o \rangle_0 + \langle V_o \rangle_0)}{dt} = -2 \frac{\sin((\hat{d} + D)\pi)}{\pi} (\langle \hat{i}_t \rangle_1^R + \langle I_t \rangle_1^R) - 2 \frac{\cos((\hat{d} + D)\pi)}{\pi} (\langle \hat{i}_t \rangle_1^I + \langle I_t \rangle_1^I) - i_n - \frac{1}{R_o} (\langle \hat{v}_o \rangle_0 + \langle V_o \rangle_0)$$

usando a relação trigonométrica:

$$\begin{aligned}\text{sen}(A + B) &= \text{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\text{sen}(B) \\ \cos(A + B) &= \cos(A)\cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B)\end{aligned}$$

$$\text{sen}(\pi D + \pi \hat{d}) = \text{sen}(\pi D)\cos(\pi \hat{d}) + \cos(\pi \hat{D})\text{sen}(\pi \hat{d})$$

$$C_o \frac{d(\langle \hat{v}_o \rangle_0 + \langle V_o \rangle_0)}{dt} = -2 \frac{\sin((\hat{d} + D)\pi)}{\pi} (\langle \hat{i}_t \rangle_1^R + \langle I_t \rangle_1^R) - 2 \frac{\cos((\hat{d} + D)\pi)}{\pi} (\langle \hat{i}_t \rangle_1^I + \langle I_t \rangle_1^I) - i_n - \frac{1}{R_o} (\langle \hat{v}_o \rangle_0 + \langle V_o \rangle_0)$$

considerando pequenas perturbações e eliminando os termos CC e de segunda ordem fica:

$$\begin{aligned}C_o \frac{d\hat{v}_o}{dt} &= -\frac{\hat{v}_o}{R_o} - 4\cos(\pi D)\langle I_t \rangle_1^R \hat{d} - \frac{4\text{sen}(\pi D)}{\pi} \langle I_t \rangle_1^R + 4\text{sen}(\pi D)\langle I_t \rangle_1^I \hat{d} - \frac{4\text{sen}(\pi D)}{\pi} \langle I_t \rangle_1^I \\ L_t \frac{d\langle \hat{i}_t \rangle_1^R}{dt} &= \frac{2\hat{v}_o}{\pi} \text{sen}(\pi D) + 2V_o \cos(\pi D) \hat{d} - R_o \langle \hat{i}_t \rangle_1^R + \omega_s \langle \hat{i}_t \rangle_1^I \\ L_t \frac{d\langle \hat{i}_t \rangle_1^I}{dt} &= \frac{2\hat{v}_o}{\pi} \cos(\pi D) - 2V_o \text{sen}(\pi D) \hat{d} - R_o \langle \hat{i}_t \rangle_1^I - \omega_s \langle \hat{i}_t \rangle_1^R - \frac{2}{\pi} \langle \hat{v}_i \rangle_0\end{aligned} \quad (33)$$

A forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} L_t & 0 & 0 \\ 0 & L_t & 0 \\ 0 & 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \hat{i}_t \rangle_1^R \\ \langle \hat{i}_t \rangle_1^I \\ \langle \hat{v}_o \rangle_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_t & w_s & 2/\pi \operatorname{sen}(D\pi) \\ -w_s & -R_t & 2/\pi \operatorname{cos}(D\pi) \\ -4/\pi \operatorname{sen}(D\pi) & -4/\pi \operatorname{cos}(D\pi) & -\frac{1}{R_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \hat{i}_t \rangle_1^R \\ \langle \hat{i}_t \rangle_1^I \\ \langle \hat{v}_o \rangle_0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & 2V_o \operatorname{cos}(\pi D) \hat{d} \\ -2/\pi & -2V_o \operatorname{sen}(\pi D) \hat{d} \\ 0 & -4\operatorname{cos}(\pi D) \langle \hat{i}_t \rangle_1^R + 4\operatorname{sen}(\pi D) \langle \hat{i}_t \rangle_1^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \hat{v}_i \rangle_0 \\ \hat{d} \end{bmatrix}$$

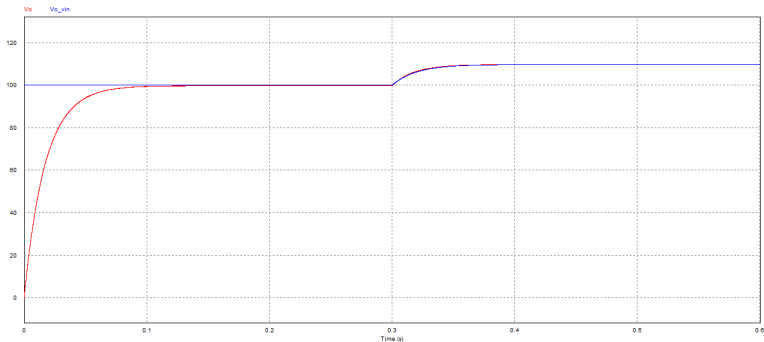


Figure : Perturbação na tensão de entrada

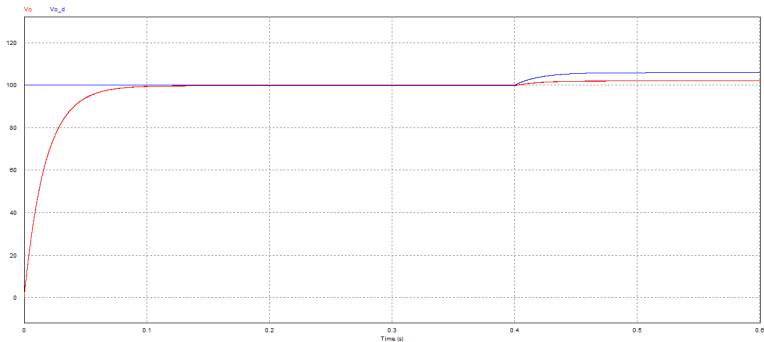


Figure : Perturbação na razão cíclica

- [1] H. Qin and J. W. Kimball, *Generalized Average Modeling of Dual Active Bridge DC–DC Converter*, IEEE Transactions on Power Electronics, April 2012.
- [2] S. R. Sander and J. M. Noworolski and X. Z. Liu and G. C. Verghese, *Generalized Average Modeling for Power Conversion Circuits*, IEEE Transactions on Power Electronics, April 1991.
- [3] J. M. Noworolski and S. R. Sanders, *Generalized In-Place Circuit Averaging*, IEEE Transactions on Power Electronics, 1991.
- [4] C. A. Caliskan and G. C. Verghese and A. M. Stankovic *Multifrequency Averaging of DC/DC Converters*, IEEE Transactions on Power Electronics, January 1999.
- [5] R.D. Middlebrook and S. Ćuk, *A General Unified Approach to Modelling Switching-Converter Power Stages*, IEEE Power Electronics Specialists Conference, June 1976.

- [6] R. Engleitner *Análise Estática Normalizada e Modelagem de Pequenos Sinais do Conversor Classe-E Utilizando Transformadores Piezoelétricos*. Dissertação Mestrado, UFSM, 2011.
- [7] W. W. A. G. Silva *Estudo e implementação de um conversor bidirecional como interface na regulação de tensão em barramento c.c. e carregamento de baterias em um Sistema Nanorrede*. Dissertação Mestrado, UFMG, 2013
- [8] W. M. dos Santos *Estudo e Implementação do Conversor TAB (Triple Active Bridge) Aplicado a sistemas Renováveis Solares Fotovoltaicos*. Dissertação Mestrado, UFSC, 2011.
- [9] S. I. Seleme Jr. *Técnicas de Modelagem e Controle de Conversores Estáticos*. Minicurso, IV INDUSCON, Joinville - SC, Outubro 2004.

considerando $T_s = 2\pi$

$$v_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{\frac{jk2\pi t}{T_s}}$$

$$v_1(t) = \sum_{k=-1}^1 a_k e^{\frac{jk2\pi t}{T_s}}$$

$$a_k = \frac{1}{T_s} \int_{T_s} v_1(\tau) e^{-\frac{jk2\pi}{T_s} \tau} d\tau$$

$$v_1(t) = a_1 e^{\frac{j2\pi t}{T_s}} + a_0 + a_{-1} e^{-\frac{j2\pi t}{T_s}}$$

$$v_0 = \frac{1}{T_s} \left[\left(\int_0^{\frac{T_s}{2}} e^{-\frac{j(0)2\pi}{T_s} \tau} d\tau \right) + \left(\int_{\frac{T_s}{2}}^{T_s} (-1) e^{-\frac{j(0)2\pi}{T_s} \tau} d\tau \right) \right]$$

$$v_0 = \frac{1}{T_s} \left[\left(\frac{T_s}{2} - 0 \right) - \left(T_s - \frac{T_s}{2} \right) \right]$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = \frac{1}{T_s} \left(\int_0^{\frac{T_s}{2}} \cos(kw_s \tau) d\tau - j \int_0^{\frac{T_s}{2}} \sen(kw_s \tau) d\tau \right) +$$

$$\frac{1}{T_s} \left(\int_{\frac{T_s}{2}}^{T_s} \cos(kw_s \tau) d\tau - j \int_{\frac{T_s}{2}}^{T_s} \sen(kw_s \tau) d\tau \right)$$

$$v_1^R = 0$$

$$v_1^j = -j \frac{4}{T_s}$$

$$v_2^R = -\frac{2\sen(d\pi)}{\pi}$$

$$v_2^j = -\frac{2\cos(d\pi)}{\pi}$$