



## DUAS NOVAS ABORDAGENS PARA O PROBLEMA DE ROTULAÇÃO CARTOGRÁFICA DE PONTOS: $r$ -SEPARAÇÃO E $p$ -DISPERSÃO

Sóstenes Pereira Gomes<sup>1</sup>  
Glaydston Mattos Ribeiro<sup>2</sup>  
Luiz Antonio Nogueira Lorena<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Av. dos Astronautas, 1758, São José dos Campos – SP, Brasil  
<sup>1</sup>sostenes.gomes@gmail.com, <sup>3</sup>lorena@lac.inpe.br

<sup>2</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Av. Horácio Macedo, 2030, Rio de Janeiro – RJ, Brasil  
glaydston@pet.coppe.ufrj.br

### RESUMO

Este trabalho aborda o Problema de Rotulação Cartográfica de Pontos (PRCP), o qual é um problema de otimização combinatória já demonstrado na literatura ser NP-difícil. Considera-se que quando todos os pontos devem ser rotulados e sobreposições de rótulos são inevitáveis, o mapa pode ser mais legível se os rótulos em conflito são posicionados de maneira dispersiva, isto é, se os rótulos são posicionados o mais distante possível. Este trabalho apresenta duas novas formulações para o PRCP, que utilizam valores de distância entre os rótulos, visando obter uma melhor legibilidade nas soluções, quando conflitos não podem ser evitados. As formulações de programação linear inteira mista são baseadas em formulações propostas na literatura para os problemas de  $r$ -Separação e  $p$ -Dispersão. Nossos testes computacionais apresentam resultados para instâncias com até 5046 pontos, com uma das formulações apresentaram bons resultados quanto à quantidade de rótulos livres.

**PALAVARAS CHAVE:** Rotulação cartográfica, Programação inteira, Otimização combinatória.

**Área principal:** Otimização combinatória.

### ABSTRACT

This paper concerns to the Point Feature Cartographic Label Placement Problem (PFCLP), which is a NP-hard combinatorial problem. It is considered that when all points must be labeled and overlaps are inevitable, the map can be more readable if overlapping labels are placed in a dispersive way, i. e., labels are placed more distant from each other. This work presents two new formulations for the PFCLP, which utilize distance values between candidate positions of labels, aiming to improve readability of the map, when conflicts cannot to be avoided. The proposed formulations of mixed integer linear programming and are based on formulations proposed in the literature for  $r$ -Separation and  $p$ -Dispersion problems. Our computational tests presents results for instances with up to 5046 points, and one of the formulations presented good results of number of free labels.

**PALAVARAS CHAVE:** Cartographic label placement, Integer programming, Combinatorial optimization.

**Main area:** Combinatorial optimization.

## 1. INTRODUÇÃO

O problema de automaticamente posicionar rótulos em mapas, diagramas, grafos ou qualquer objeto gráfico, conhecido como Problema de Rotulação Cartográfica (PRC), é um problema comum na área de Sistemas de Informações Geográficas (SIG) e é geralmente referenciado em três características diferentes: linhas (rios, estradas, etc.), polígonos (lagos, distritos, construções, etc.) e pontos (cidades, montanhas, etc.). No PRC, é necessário considerar que a sobreposição de rótulos deve ser evitada para uma melhor visibilidade do objeto gráfico. A Figura 1 apresenta um exemplo de sobreposição de rótulos do mapa do Estado do Espírito Santo, Brasil.



Figura 1. Exemplo de sobreposição de rótulos, marcadas por setas (Ribeiro e Lorena, 2006).

O problema de rotular características de pontos, evitando a sobreposição de rótulos, é conhecido na literatura como o Problema de Rotulação Cartográfica de Pontos (PRCP). Christensen et al. (1995) propuseram uma padronização para a modelagem discreta das possíveis posições de rótulos, definidas como posições candidatas, em características de pontos. Esta padronização utiliza um valor de *rank* de prioridade indicando as melhores posições, onde o menor número representa a maior prioridade. A Figura 2 ilustra esta padronização, considerando quatro e oito posições candidatas.

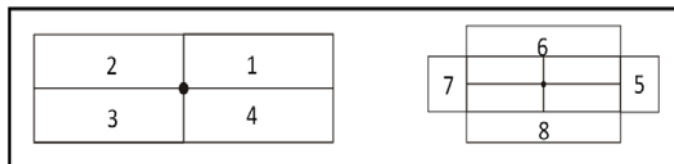


Figura 2. Padronização cartográfica proposta por Christensen et al. (1995).

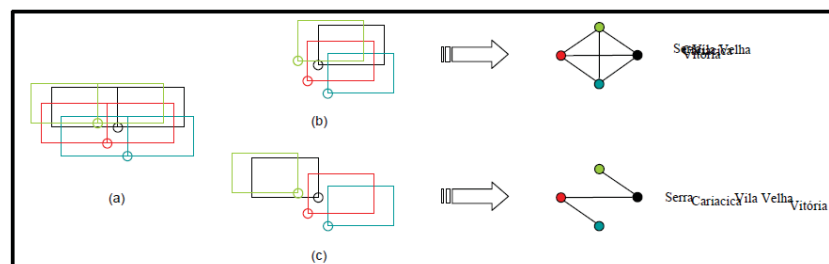
As possíveis sobreposições de rótulos, considerando a padronização de Christensen et al. (1995), podem ser modeladas como um grafo de conflitos  $G = (V, A)$ , onde o vértice  $v_{i,j} \in V$ , representa a posição candidata  $j$  do ponto  $i$  e a aresta  $(v_{i,j}, v_{k,t}) \in A$  representa uma sobreposição (conflito) entre as posições candidatas  $j$  e  $t$  dos pontos  $i$  e  $k$  respectivamente, caso estas posições sejam escolhidas para rotulação.

Existem atualmente três principais abordagens do PRCP que utilizam a estrutura do grafo de conflitos: Problema do Máximo Conjunto Independente de Vértices (PMCI), Problema

do Máximo Número de Rótulos Sem Conflitos (PMNRSC) e o Problema da Minimização do Número de Conflitos (PMNC) (Ribeiro e Lorena, 2006).

Como um PMCIIV, o objetivo é rotular a maior quantidade de pontos possível, e como problemas reais são em geral muito complexos, alguns pontos podem não ser rotulados com esta abordagem.

No PMNRSC, o objetivo é rotular todos os pontos do mapa de forma que a quantidade de rótulos posicionados sem conflitos seja a máxima possível. Já o PMNC visa minimizar a quantidade de conflitos gerados no processo de rotular todos os pontos do mapa. Na Figura 3, a diferença entre as duas abordagens é ilustrada.



**Figura 3.** Comparação entre PMNRSC e PMNC (Ribeiro, 2007).

A Figura 3 apresenta duas soluções possíveis e os grafos de conflitos destas soluções, para uma instância do PRCP (a) com 4 pontos e 2 posições candidatas para cada ponto, de acordo com a padronização cartográfica de Christensen et al. (1995). Ambas as soluções são idênticas do ponto de vista do PMNRSC, pois as duas soluções possuem quatro rótulos em conflito. Porém, considerando as soluções do ponto de vista do PMNC, a solução (b) é pior que a solução (c), pois possui maior quantidade de conflitos na solução, o que é refletido no grafo de conflitos correspondente, com uma quantidade maior de arestas. Observa-se que nas abordagens dos problemas como PMNRSC e PMNC, ao contrário do PMCIIV, todos os pontos são rotulados.

Técnicas baseadas nas abordagens citadas tendem tratar o problema utilizando apenas a identificação das possíveis sobreposições de rótulos, no grafo de conflito. Este trabalho apresenta duas novas abordagens para o PRCP que utilizam também as distâncias entre as posições candidatas em conflito:  $r$ -Separação e  $p$ -Dispersão. Estas duas abordagens têm sido utilizadas na literatura para o Problema de Localização de Facilidades (PLF).

O restante deste trabalho está organizado com se segue. Uma revisão bibliográfica sobre o PRCP é apresentada na próxima seção. Seções 3 e 4 apresentam os modelos do PRCP como  $r$ -Separação e  $p$ -Dispersão respectivamente e os resultados computacionais obtidos. Seção 5 apresenta as considerações finais sobre o presente trabalho.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Existem diversos trabalhos na literatura sobre as três principais abordagens do PRCP. Considerando como PMCIIV, Zoraster (1990) apresentou uma formulação de programação linear binária e propôs restrições com posições candidatas fictícias que são penalizadas na função objetivo. Strijk et al. (2000) propuseram formulações matemáticas utilizando restrições de corte com inequações para todas as cliques máximas no grafo de conflitos. Para instâncias grandes eles aplicaram diversas heurísticas: Simulated Annealing, Diversified Neighborhood Search,  $k$ -opt e Busca Tabu. Agarwal et al. (1998) propuseram algoritmos de aproximação para rotular a maior quantidade possível de pontos através da obtenção do subconjunto máximo de retângulos de dimensões variadas que não se intersectam. Verweij e Aardal (1999) apresentaram um algoritmo *branch-and-cut* e resultados para instâncias com 950 pontos. Adicionalmente, os autores apresentaram uma técnica baseada em decomposição de caminhos. Ribeiro et al. (2011) apresentaram uma decomposição Lagrangeana para o problema e soluções ótimas para quase todas as instâncias de grande escala propostas na literatura.

Considerando a abordagem do PMNRSC, Christensen et al. (1995) propuseram dois algoritmos baseados em uma discretização da descida de gradiente e Simulated Annealing. Yamamoto et al. (2002) propuseram um algoritmo de Busca Tabu que obteve bons resultados em dados reais. Yamamoto e Lorena (2005) apresentaram um algoritmo exato e um Algoritmo Genético Construtivo. O algoritmo exato não conseguiu bons resultados em instâncias maiores que 25 pontos enquanto o Algoritmo Genético obteve bons resultados para instâncias de até 1000 pontos. Alvim e Taillard (2009) utilizaram as instâncias propostas por Yamamoto et al. (2002) para testes da metaheurística POPMUSIC. A POPMUSIC constrói inicialmente subproblemas do problema principal. Estes subproblemas são resolvidos separadamente e são integrados como uma nova solução do problema principal. O método é repetido para obter soluções melhoradas até um dado critério de parada. Mauri et al. (2010) propuseram o primeiro modelo matemático para o PMNRSC e uma decomposição Lagrangeana para resolver o problema em instâncias de até 1000 pontos. Seus resultados computacionais apresentam soluções ótimas para diversas instâncias propostas na literatura.

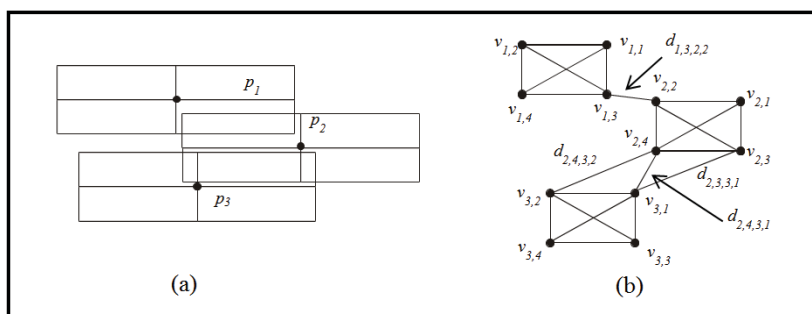
O PMNC foi introduzido por Ribeiro e Lorena (2006) como uma nova abordagem para melhorar a legibilidade de soluções, quando todos os pontos devem ser rotulados e sobreposições são inevitáveis. Eles apresentaram uma formulação matemática e algumas heurísticas de relaxação Lagrangeanas. Cravo et al. (2008) propuseram um algoritmo GRASP e obtiveram melhores resultados que outras técnicas da literatura. Ribeiro e Lorena (2008) apresentaram duas formulações matemáticas para o PMNC e propuseram relaxações Lagrangeanas com clusters, que obtiveram melhores resultados que os apresentados na literatura. A principal diferença entre as formulações é como os grafos de conflitos são construídos: uma formulação é baseada apenas nas posições candidatas enquanto a outra é baseada em posições candidatas e pontos.

Recentemente Gomes et al. (2013) apresentaram duas formulações de dispersão discreta para o PRCP, utilizando distâncias entre posições candidatas nos grafos de conflitos, que obtiveram bons resultados.

Neste trabalho é utilizada a Formulação Baseada em Posições Candidatas (FMBCP) proposta por Ribeiro e Lorena (2008) para comparação com o modelo de dispersão proposto. Esta formulação utiliza dois conjuntos de variáveis binárias: um para representar a decisão de utilizar ou não uma posição candidata, e outro para representar conflitos entre pares de rótulos posicionados. Os modelos apresentados neste trabalho utilizam também estes dois conjuntos de variáveis, que são melhor explicados na seção 3.1.

### 3. MODELOS PROPOSTOS E RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Nesta seção são apresentadas duas novas abordagens para o PRCP que utilizam as distâncias entre conflitos. Estas distâncias são utilizadas como pesos nas arestas do grafo de conflitos, como exemplificado na Figura 4.



**Figura 4.** Conjunto com 3 pontos com 4 posições candidatas para cada ponto (a), e seu grafo de conflitos (b).

Na Figura 4 é apresentado um conjunto de 3 pontos e seu grafo de conflitos. Os pesos das arestas são as distâncias  $d_{i,j,k,l}$  entre as posições candidatas representadas pelos vértices  $v_{i,j}$  e

$v_{k,t}$ . Observa-se que apenas as distâncias de conflitos entre posições candidatas de pontos diferentes são consideradas. Nas subseções a seguir, um ponto  $i$  e sua posição candidata  $j$  serão representados pelo par  $(i, j)$ , com  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  e  $j = \{1, 2, \dots, P_i\}$ , onde  $N$  é a quantidade de pontos a serem rotulados e  $P_i$  é a quantidade de posições candidatas do ponto  $i$ .

As abordagens apresentadas neste trabalho consideram o PRCP do ponto de vista da legibilidade, levando em conta que quanto maior a distância entre os rótulos posicionados em conflito, mais legível é uma solução. Para avaliação dos resultados do ponto de vista da legibilidade, utiliza-se além da quantidade de rótulos livres de conflitos, o valor da menor distância entre rótulos em conflitos.

**Tabela 1.** Instâncias de 505 pontos.

A	L	Quantidade de conflitos	Pontos rotulados após redução
2	24	1115	316
2	32	1667	263
3	16	1702	267
2	42	2151	232
2	48	2371	219
3	24	2955	176
4	16	3224	175
3	28	3439	160
4	18	3756	149
3	32	3995	137
4	21	4490	122
4	24	5035	110

**Tabela 2.** Instâncias de 5046 pontos.

A	L	Quantidade de conflitos	Pontos rotulados após redução
2	24	14003	3101
2	32	19350	2644
3	16	20590	2584
2	42	25572	2253
2	48	29151	2075
3	24	33591	1833
4	16	34445	1856
3	28	39633	1593
4	18	39644	1626
3	32	45762	1368
4	21	46796	1383
4	24	53914	1180

Para os testes das formulações apresentadas nesta seção, foi utilizado o *solver* CPLEX 12.1 (IBM, 2009) em conjuntos de 505 e 5046 pontos, considerando 4 posições candidatas para cada ponto, de acordo com a padronização proposta por Christensen et al. (1995). Os pontos utilizados foram obtidos aleatoriamente de um conjunto de 13206 pontos que correspondem a cidades do mapa da Suíça, disponível na URL <http://mistic.heig-vd.ch/taillard/problemes.dir/problemes.html>, e 12 instâncias foram geradas de ambos os conjuntos, variando as dimensões de altura e largura das posições candidatas. Observa-se que o CPLEX não conseguiu resolver as instâncias com 13206 devido à falta de memória.

Os testes computacionais foram executados em um computador com processador Intel Core i5 e 4 GB de RAM. A heurística de redução proposta por Wagner et al. (2001) foi utilizada como um pré-processamento inicial, para reduzir a quantidade de conflitos das instâncias. As Tabelas 1 e 2 apresentam informações sobre as instâncias utilizadas. As colunas das tabelas referem-se respectivamente aos seguintes dados: altura do rótulo (A), largura do rótulo (L), quantidade de conflitos após a utilização da heurística de redução e quantidade de pontos rotulados após o uso da heurística de redução.

As seções a seguir apresentam os modelos de programação matemática propostos neste trabalho.

### 3.1. *r*-Separação

O *r*-Separação é descrito como o problema de encontrar em um conjunto de pontos, o maior subconjunto possível de pontos que estão separados por uma distância maior ou igual a *r* (Erkut et al., 1996). Este problema tem aplicações no Problema de Localização de Facilidades e está relacionado diretamente ao PMCIIV.

Nesta seção é apresentada uma abordagem do PRCP como *r*-Separação. O objetivo da abordagem é solucionar o problema garantindo uma distância mínima de separação entre os rótulos posicionados.

Erkut et al. (1996) apresentaram uma formulação para o *r*-Separação como um problema de programação inteira, que utiliza a variável binária  $x_u$  representando a seleção do ponto candidato  $u$ , onde

$$x_u = \begin{cases} 1 & \text{se o ponto } u \text{ é selecionado.} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ao selecionar o ponto  $u$  pertencente ao conjunto  $U$  de pontos candidatos, é necessário assegurar sua separação dos demais em ao menos  $r$  unidades de distância. Então considerando  $L_u(r)$  o conjunto de posições candidatas adjacentes a  $u$  e  $d_{u,v}$  a distância euclidiana entre  $u$  e  $v$ , tal que  $d_{u,v} \geq r, \forall v \in L_u(r)$ , tem-se o conjunto de restrições

$$x_u + x_v \leq 1, \quad \forall u = 1 \dots U, \forall v \in L_u(r). \quad (1)$$

A inequação (1) assegura que os pontos  $u$  e  $v$  não podem ser selecionados simultaneamente. A formulação de programação linear inteira do *r*-Separação é definida como se segue:

$$\text{Max } \sum x_u \quad (2)$$

Sujeito a:

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \forall u = 1 \dots U, \forall v \in L_u(r) \quad (3)$$

$$x_u, x_v \in \{0,1\} \quad \forall u = 1 \dots U, \forall v \in L_u(r) \quad (4)$$

A função objetivo (2) visa obter o maior conjunto de pontos, tendo em conta a restrição de que a distância entre os pontos selecionados deve ser maior que  $r$  unidades de distância. Note que quando  $r$  é maior ou igual à maior distância entre pontos, em uma instância do problema, a formulação do *r*-Separação é equivalente à do PMCIIV.

No contexto do PRCP, o objetivo da modelagem como *r*-Separação é garantir uma distância mínima entre os rótulos posicionados. No modelo proposto neste trabalho, cada ponto do grafo representa um rótulo ou posição candidata. Neste caso, o valor da variável binária  $x_{i,j}$  representa a seleção ou não de uma posição candidata  $j$  do ponto  $i$ , para o posicionamento do rótulo. Consideramos que apenas um rótulo deve ser selecionado para cada ponto. Esta restrição é modelada pelas seguintes equações:

$$\sum_{j=1}^{P_i} x_{i,j} \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots N. \quad (5)$$

Também é necessário tentar evitar conflitos ao posicionar os rótulos. Considerando a variável binária  $y_{i,j,k,t}$ , em que o valor 1 indica um conflito entre o rótulo  $j$  do ponto  $i$  e o rótulo  $t$  do ponto  $k$ , é utilizada a seguinte restrição:

$$x_{i,j} + x_{k,t} - y_{i,j,k,t} \leq 1, \quad (k,t) \notin L_{i,j}(r), (k,t) \in S_{i,j}, \quad \forall i = 1 \dots N, \quad \forall j = 1 \dots P_i. \quad (6)$$

Onde  $S_{i,j}$  é o conjunto de todas as posições candidatas adjacentes a  $(i, j)$  e  $L_{i,j}(r)$  é o conjunto de posições candidatas  $(k, t) \in S_{i,j}$ , que estão a  $r$  ou mais unidades de distância de  $(i, j)$ , isto é,  $d_{i,j,k,t} \geq r$ . Para garantir a distância mínima entre rótulos posicionados, utilizam-se restrições de distância:

$$x_{i,j} + x_{l,m} \leq 1, \quad (l,m) \in L_{i,j}(r), \quad \forall i = 1 \dots N, \quad \forall j = 1 \dots P_i. \quad (7)$$

A formulação do PRCP como um problema  $r$ -Separação é apresentada a seguir:

$$\text{Max} \sum x_{i,j} - \sum_{(k,t) \in (S_{i,j} - L_{i,j}(r))} y_{i,j,k,t} \quad (8)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{P_i} x_{i,j} \leq 1 \quad \forall i = 1 \dots N. \quad (9)$$

$$x_{i,j} + x_{k,t} - y_{i,j,k,t} \leq 1 \quad \begin{array}{l} (k,t) \in S_{i,j} - L_{i,j}(r), \\ \forall i = 1 \dots N, \\ \forall j = 1 \dots P_i. \end{array} \quad (10)$$

$$x_{i,j} + x_{l,m} \leq 1 \quad \begin{array}{l} (l,m) \in L_{i,j}(r), \\ \forall i = 1 \dots N, \\ \forall j = 1 \dots P_i. \end{array} \quad (11)$$

$$x_{i,j}, x_{k,t}, x_{l,m}, y_{i,j,k,t} \in \{0,1\} \quad \begin{array}{l} (k,t) \in S_{i,j}, \\ (l,m) \in L_{i,j}(r), \\ \forall i = 1 \dots N, \\ \forall j = 1 \dots P_i. \end{array} \quad (12)$$

A função bi-objetivo (8) tenta maximizar a quantidade de pontos rotulados e minimizar a quantidade de rótulos posicionados em conflito. Resultados desta abordagem são apresentados na Seção 3.1.1. com diferentes valores de  $r$ .



### 3.1.1. Resultados Computacionais

Nesta seção são apresentados resultados para o modelo  $r$ -Separação para as instâncias do conjunto de 5046 pontos, com diferentes dimensões de rótulos e valores de  $r$ . Os valores de  $r$  escolhidos arbitrariamente para os testes são três: 1.14, 9.05 e a maior distância de conflito presente na instância. O tempo de execução dos testes foi limitado em 3000 segundos.

Os resultados para os diferentes valores de raios são apresentados nas colunas com os títulos de  $r_{1.14}$ ,  $r_{9.05}$  e  $r_{Maior}$ , na Tabela 3. As colunas  $A$  e  $L$  apresentam as dimensões de rótulos de altura e largura. Os resultados estão agrupados pelos seguintes quesitos de comparação: quantidade de pontos não rotulados (**Pts. não rotulados**), quantidade de rótulos com conflitos (**Rót. com conflitos**), menor distância de conflito no resultado ( $d_{i,j,k,t}$ ) e tempo de execução em segundos (**T(s)**).

**Tabela 3.** Resultados da formulação do PRCP como  $r$ -Separação.

		Pts. não rotulados			Rót. com conflitos			$d_{i,j,k,t}$			T (s)		
$A$	$L$	$r_{1.14}$	$r_{9.05}$	$r_{Maior}$	$r_{1.14}$	$r_{9.05}$	$r_{Maior}$	$r_{1.14}$	$r_{9.05}$	$r_{Maior}$	$r_{1.14}$	$r_{9.05}$	$r_{Maior}$
2	24	9	9	9	0	0	0	-	-	-	20,81	4,03	0,27
2	32	15	15	15	0	0	0	-	-	-	24,91	8,39	0,34
3	16	38	38	38	0	0	0	-	-	-	113,71	8,92	0,45
2	42	27	27	27	0	0	0	-	-	-	57,64	31,79	0,75
2	48	36	39	40	2	8	0	22,02	13,03	-	125,43	43,67	0,79
3	24	83	83	84	2	2	0	14,03	21,02	-	3000	3000	5,60
4	16	108	108	109	2	2	0	2,23	12,16	-	3000	3000	6,77
3	28	105	105	105	0	0	0	-	-	-	3000	3000	2,15
4	18	132	140	140	16	0	0	1,41	-	-	3000	3000	12,54
3	32	127	134	138	8	22	0	2,23	13,03	-	3000	3000	2,95
4	21	174	185	185	26	0	0	1,41	-	-	3000	3000	34,74
4	24	231	236	236	10	2	0	2,23	14,14	-	3000	3000	3000

O modelo garante a distância mínima  $r$  entre rótulos posicionados em conflito. Nota-se que com um raio maior, a quantidade de pontos não rotulados aumentou também, pois, com um valor de raio maior, a quantidade de restrições na forma de (11) também é maior. Em algumas situações, alguns pontos não são rotulados, para que a função objetivo não seja reduzida da quantidade de conflitos que o posicionamento do rótulo geraria. Nas instâncias com o  $r_{maior}$ , naturalmente a quantidade de conflitos é 0 em todos os resultados, pois qualquer possível conflito está dentro do raio.

### 3.2. $p$ -Dispersão

O segundo modelo com restrições de distância, proposto para o PRCP, utiliza o conceito de dispersão discreta, denominado  $p$ -Dispersão em diversos trabalhos na literatura (Kuby, 1987; Erkut, 1990; Erkut et al., 1996). Esta abordagem tem sido utilizada no Problema de Localização de Facilidades, com o objetivo de selecionar de um conjunto de posições candidatas, um subconjunto de  $p$  posições que possuam a maior distância possível entre si. Uma formulação apresentada por Erkut (1990) utiliza também a varável binária  $x_u$ , como apresentada na seção 3.1. Para cada par de posições candidatas, de um conjunto de  $U$  posições, utiliza-se a seguinte restrição de distância:

$$z \leq M(2 - x_u - x_v) + d_{u,v} \quad 1 \leq u < v \leq U \quad (12)$$



Quando maximizando o valor de  $z$ , com  $M$  maior ou igual à maior distância, é mais vantajoso selecionar posições candidatas com maior valor de  $d_{u,v}$ , pois  $z$  será limitado à menor distância entre as posições selecionadas. O problema  $p$ -Dispersão pode ser modelado pela seguinte formulação de programação linear:

$$\text{Max } z \quad (13)$$

*Subject to:*

$$z \leq M(2 - x_u - x_v) + d_{u,v} \quad 1 \leq u < v \leq U \quad (14)$$

$$x_u, x_v \in \{0,1\} \quad 1 \leq u < v \leq U \quad (15)$$

$$z \geq 0. \quad (16)$$

É importante observar que o problema  $p$ -Dispersão está relacionado ao  $r$ -Separação. Considerando  $D$  o conjunto de posições candidatas selecionadas como uma solução para uma instância do  $p$ -Dispersão, o valor  $z$  obtido é tal que  $d_{u,v} \geq z, \forall (u, v) \in D$ . Neste caso, uma solução para o  $p$ -Dispersão, é uma solução para o  $r$ -Separação, com  $r = z$ .

O objetivo do uso da abordagem do PRCP como  $p$ -Dispersão é rotular os pontos de maneira esparsa, permitindo uma melhor legibilidade do mapa. Para o modelo proposto com esta abordagem, considera-se que todos os pontos devem ser rotulados. Para isto é utilizada a seguinte restrição:

$$\sum_{j=1}^{P_i} x_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1 \dots N. \quad (17)$$

É necessário também considerar que sobreposições devem ser evitadas, e no caso de não ser possível, que os rótulos estejam posicionados o mais distante possível. Para esta restrição utilizam-se as seguintes inequações:

$$\begin{aligned} z &\leq d_{i,j,k,t} (2 - x_{i,j} - x_{k,t}) && \forall i = 1 \dots N \\ & && \forall j = 1 \dots P_i \\ & && (k,t) \in S_{i,j} \end{aligned} \quad (18)$$

Ao maximizar o valor de  $z$ , é mais vantajoso atribuir 0 a  $x_{i,j}$  e  $x_{k,t}$  de maneira que  $z$  possa aumentar até  $2d_{i,j,k,t}$ , evitando possíveis conflitos. A abordagem de dispersão para o PRCP é modelada pela seguinte formulação de programação linear:

$$\text{Max } z \quad (19)$$

*Subject to:*

$$\sum_{j=1}^{P_i} x_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (20)$$

$$z \leq d_{i,j,k,t} (2 - x_{i,j} - x_{k,t}) \quad \forall i = 1 \dots N$$

$$\forall j = 1 \dots P_i \quad (21)$$

$$(k,t) \in S_{i,j}$$

$$x_{i,j}, x_{k,t} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1 \dots N$$

$$\forall j = 1 \dots P_i \quad (22)$$

$$(k,t) \in S_{i,j}$$

$$z \geq 0. \quad (23)$$

As restrições (21) limitam o valor de  $z$  em no máximo  $2 \cdot \min(d_{i,j,k,t})$ , que corresponde a uma solução sem conflitos. Resultados do modelo são apresentados na seção a seguir.

### 3.2.1. Resultados Computacionais

Esta seção apresenta os resultados computacionais para o modelo de dispersão proposto (MD) e a FMBCP, proposta por Ribeiro e Lorena (2008), para os conjuntos de 505 e 5046 pontos. A opção *best-estimate* foi utilizada para a estratégia de seleção de nós da árvore do *Branch & Bound* no CPLEX. As Tabelas 4 e 5 apresentam resultados para dispersão e proporção de rótulos livres de sobreposição, para todas as 24 instâncias geradas. As colunas com os títulos **A** e **L** apresentam os valores das dimensões de Altura e Largura dos rótulos. Os resultados estão agrupados pelos quesitos de tempo de execução em segundos (**T. (s)**), proporção de rótulos livres (**Prop. rot. livres (%)**) e menor distância de conflito no resultado ( $d_{i,j,k,t}'$ ).

Os melhores resultados para dispersão ( $d_{i,j,k,t}'$ ) e proporção de rótulos livres são marcados em negrito. Traços nos resultados de  $d_{i,j,k,t}'$  indicam que a solução possui todos os rótulos posicionados sem conflitos. O tempo de execução dos testes foi limitado em 5500 seg.

**Tabela 4.** Resultados do PRCP como  $p$ -Dispersão para as instâncias de 505 pontos.

		T. (s)		Prop. rot. livres (%)		$d_{i,j,k,t}'$	
A	L	FMBCP	DM	FMBCP	DM	FMBCP	DM
2	24	0,09	0,12	100,00	100,00	-	-
2	32	0,28	1,31	100,00	100,00	-	-
3	16	0,14	1,17	100,00	100,00	-	-
2	42	1,59	3,85	99,20	99,20	10,04	9,05
2	48	2,02	4,29	99,20	<b>99,60</b>	30,01	9,05
3	24	2,41	2,29	98,40	<b>99,60</b>	11,01	9,21
4	16	15,97	5,79	96,40	<b>98,40</b>	6,08	9,05
3	28	4,28	4,41	97,20	<b>99,20</b>	3,16	9,05
4	18	6,92	4,04	95,20	<b>98,40</b>	3,16	9,21
3	32	6,01	34,62	95,60	<b>98,00</b>	3,16	9,05
4	21	17,87	6,32	93,40	<b>99,20</b>	2,23	9,21
4	24	193,86	17,07	90,50	<b>97,60</b>	1,41	9,05

O MD apresenta melhores resultados de rótulos posicionados sem conflitos que a FMBCP nas instâncias utilizadas, empatando apenas nos dados com dimensões de rótulos

menores. Como esperado, o MD apresenta melhores resultados para  $d_{i,j,k,t}$ , já que utiliza a abordagem de dispersão discreta, que não é objetivo da FMBCP. Traços nos resultados para  $d_{i,j,k,t}$  indicam que não existem conflitos na solução. Observa-se que os resultados do MD mantêm-se mais estáveis conforme a complexidade das instâncias aumenta, ao incrementar o valor da dimensão dos rótulos.

**Tabela 5.** Resultados do PRCP como  $p$ -Dispersão para as instâncias de 5046 pontos.

A	L	T. (s)		Prop. Rot. livres (%)		$d_{i,j,k,t}$	
		FMBCP	DM	FMBCP	DM	FMBCP	DM
2	24	9,23	10,37	99,64	<b>99,96</b>	1,41	9,05
2	32	27,30	20,59	99,24	<b>99,88</b>	2,23	9,05
3	16	52,82	32,09	98,31	<b>99,38</b>	1,41	9,05
2	42	32,71	28,21	98,65	<b>99,84</b>	2,23	9,05
2	48	68,08	58,32	98,07	<b>99,84</b>	1,41	9,05
3	24	5500	5500	95,65	<b>99,6</b>	1,41	9,05
4	16	5500	5500	96,11	<b>98,73</b>	1,41	9,05
3	28	5500	5500	94,26	<b>99,44</b>	1,41	9,05
4	18	5500	5500	92,35	<b>99,16</b>	1,41	9,05
3	32	5500	5500	91,89	<b>99,58</b>	1,41	9,05
4	21	5500	5500	89,73	<b>99,08</b>	1,41	9,05
4	24	5500	5500	87,08	<b>98,85</b>	1,41	9,05

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta um estudo de novas abordagens para o PRCP, que consideram a distância entre posições candidatas para rotulação. Uma nova formulação, como um problema de  $r$ -Separação, é apresentada, bem como resultados de instâncias, com valores de raios variados.

A abordagem como  $r$ -Separação está relacionada à abordagem como problema  $p$ -Dispersão, que apresentou bons resultados de quantidade de rótulos livres. Estes resultados são indicadores de que a investigação de novas abordagens para o PRCP, que consideram distâncias entre posições candidatas, pode permitir obter melhores resultados de rotulação com prevenção de conflitos.

Trabalhos futuros incluem a implementação de uma relaxação lagrangeana com geração de colunas das restrições (10) e (21), e métodos de decomposição como os utilizados por Ribeiro e Lorena (2008).

**Agradecimentos:** Os autores agradecem ao CNPq (Processos 476862/2012-4, 307002/2011-0 e 300692/2009-9) pelo auxílio financeiro.

#### Referências

- Agarwal, P. K., Kreveld, M. V., Suri, S., (1998). Label placement by maximum independent set in rectangles. *Computational Geometry: Theory and Applications* 11, 209 - 218.
- Alvim, A. C. F., Taillard, E. D., (2009). POPMUSIC for the point feature label placement problem. *European Journal of Operational Research* 192(2), 396–413.
- Christensen, J., Marks, J., Shieber, S., (1995). An empirical study of algorithms for point-features label placement. *ACM Transactions on Graphics* 14(3), 203–232.
- Cravo, G. L., Ribeiro, G. M., Lorena, L. A. N., (2008). A greedy randomized adaptive search procedure for the point-feature cartographic label placement. *Computers & Geosciences* 34(4), 373-386.
- Erkut, E., (1990). The discrete  $p$ -Dispersion problem. *European Journal of Operational Research*, 48-60.



- Erkut, E., ReVelle, C., Ülküsal, Y.,** (1996). Integer-friendly formulations for the r-separation problem. *European Journal of Operational Research*, 342-351.
- Gomes, S. P., Ribeiro, G. M., Lorena, L. A. N.,** (2013). Dispersion for the point feature cartographic label placement problem. *Expert Systems with Applications*, 5878-5883.
- Kuby, M. J.,** (1987). Programming Models for Facility Dispersion: The p-Dispersion and Maxisum Dispersion Problems. *Geographical Analysis* 19(4), 315-329.
- Mauri, G. R., Ribeiro, G. M., Lorena, L. A. N.,** (2010). A new mathematical model and a lagrangean decomposition for the point-feature cartographic label placement problem. *Computers & Operations Research* 37(12), 2164-2172.
- Ribeiro, G. M.,** (2007). Relaxação Lagrangeana com divisão em clusters para alguns problemas de otimização modelados em grafos de conflitos. Ph.D. Dissertation, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 191pp.
- Ribeiro, G. M., Lorena, L. A. N.,** (2006). Heuristics for cartographic label placement problems. *Computers & Geosciences* 32(6), 739-748.
- Ribeiro, G. M., Lorena, L. A. N.,** (2008). Lagrangean relaxation with clusters for point-feature cartographic label placement problems. *Computers & Operations Research* 35(7), p. 2129-2140.
- Ribeiro, G. M., Mauri, G. R., Lorena, L. A. N.,** (2011). A lagrangean decomposition for the maximum independent set problem applied to map labeling. *Operational Research* 11(3), 229-243.
- Strijk, T., Verweij, B., Aardal, K.,** (2000). Algorithms for maximum independent set applied to map labeling, 42pp. Available at [www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-2000/2000-22.ps.gz](http://www.cs.uu.nl/research/techreps/repo/CS-2000/2000-22.ps.gz), [Accessed June 20, 2012].
- Verweij, A. M., Aardal, K. I.,** (1999). An optimization algorithm for maximum independent set with applications in map labelling. In: *Proceedings 7<sup>th</sup> Annual European Symposium on Algorithms*, Prague, Czech Republic, pp. 426-437.
- Wagner, F., Wolff, A., Kapoor, V., Strijk, T.,** (2001). Three rules suffice for good label placement. *Algorithmica* 30, 334 - 349.
- Yamamoto, M., Camara, G., Lorena, L. A. N.,** (2002). Tabu search heuristic for point-feature cartographic label placement. *Geoinformatica* 6(1), 77-90.
- Yamamoto, M.; Lorena, L. A. N.,** (2005). A constructive genetic approach to point-feature cartographic label placement. In: Ibaraki, T., Nonobe, K., Yagiura, M. (Eds.), *Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers*, Kluwer Academic Publishers, pp. 285-300.
- Zoraster, S.,** (1990). The solution of large 0-1 integer programming problems encountered in automated cartography. *Operations Research* 38(5), 752-759.