

## DETECTOR MMSE PARA SISTEMA COM MÚLTIPLAS PORTADORAS NÃO-ORTOGONAIS

Douglas Bezerra Linhares<sup>1\*</sup> (IC), Antônio Macilio Pereira de Lucena<sup>2</sup> (PQ), Daniel Costa Araújo<sup>3</sup> (PQ), Juliana Santos de Moura<sup>4</sup> (IC).

1. Universidade de Fortaleza (UNIFOR) – PIBIC/CNPQ

2. Universidade de Fortaleza (UNIFOR) e Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

3. Universidade Federal do Ceará (UFC) – Doutorado em Engenharia de Teleinformática

4. Universidade de Fortaleza (UNIFOR) – PIBIT/CNPQ

*douglaslinhares.o2@hotmail.com*

*Palavras-chave: NOFDM. MMSE. Detector de Máxima Verossimilhança. Portadoras Não-Ortogonais.*

### 1. Resumo

Sistemas de transmissão que utilizam portadoras não-ortogonais são mais eficientes em canais duplamente dispersivos quando comparado ao caso ortogonal. Apesar do receptor de máxima verossimilhança (ML, do inglês Maximum Likelihood) ser a estratégia de detecção ótima para canais AWGN, este possui um elevado custo computacional devido a sua complexidade. Isto nos traz a necessidade de estudar novas arquiteturas sub-ótimas de receptores, visando diminuir a complexidade computacional e aproximar-se do desempenho do detector de máxima verossimilhança.

Este trabalho apresenta uma estrutura de receptor implementado no Matlab<sup>®</sup> para um sistema de comunicação com  $N$  portadoras não-ortogonais em canal AWGN. Para isso, será proposto um receptor que utiliza filtragem linear usando um filtro que minimiza o erro quadrático médio (MMSE, do inglês, Minimum Mean Square Error) da interferência entre as portadoras. Será apresentado o desenvolvimento analítico do projeto do receptor em questão e avalia-se o desempenho do sistema através da simulação computacional da taxa de erro de bits (BER, *Bit Error Rate*). Os resultados serão apresentados e discutidos.

### 2. Introdução

O sistema OFDM (do inglês, *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) é uma técnica de modulação cujos símbolos são transmitidos através de múltiplas portadoras ortogonais e com um certo grau de superposição espectral. Esta superposição, sem a perda da ortogonalidade, permite uma economia significativa de banda, contribuindo para que os atuais sistemas de comunicação possam atingir altas taxas de dados. No entanto, este esquema de transmissão não é a melhor opção para canais dispersivos no tempo e na frequência, visto que nestes casos haverá perda da ortogonalidade e conseqüentemente interferência entre as portadoras, o que causa uma queda no desempenho do sistema [1,2].

Os canais duplamente dispersivos produzem dois tipos de degradação no desempenho do sistema: a interferência intersimbólica e a interferência interportadora. No sinal transmitido OFDM, a inserção do prefixo cíclico previne contra a interferência intersimbólica, mas isso não garante proteção contra a

interferência entre as portadoras [2]. Com base nisso, é de grande importância o estudo de sinais empregando multiplexoras não-ortogonais.

Os sistemas NOFDM (do inglês, *Non-Orthogonal Frequency Division Multiplexing*), assim como o OFDM, são caracterizados por serem sistemas multiplexoras, mas a ortogonalidade do primeiro não é mantida propositalmente com o objetivo de aumentar a robustez do sistema [2]. Esquemas de transmissão com sinais não-ortogonais foram apresentados em [3,4] e demonstraram vantagens quando comparado com o OFDM clássico em canais duplamente dispersivos.

Este trabalho apresenta uma estrutura de receptor linear para um sistema de comunicação com  $N$  portadoras não-ortogonais em canal AWGN. Para combater a interferência entre as portadoras, propõe-se um receptor que implementa um filtro linear visando minimizar o erro quadrático médio da interferência entre as portadoras. Detalha-se também o projeto do receptor, seu diagrama de blocos e avalia-se o desempenho do sistema através de simulações.

Na seção 3 será apresentado o modelo do sistema, bem como uma breve descrição do receptor de máxima verossimilhança e seu modelo discreto. Ainda nesta seção, deriva-se o receptor de erro quadrático médio mínimo. Por fim, nas seções 4 e 5, compara-se os desempenhos dos receptores por meio da taxa de erro de bits e expõe-se os resultados e conclusões respectivamente.

### 3. Metodologia

#### 3.1 Modelo do Sistema

No transmissor,  $N$  sinais  $m$ -QAM são combinados formando  $M = m^N$  possíveis formas de ondas. A  $i$ -ésima forma de onda, referente ao sinal equivalente em banda-básica, é expressa por:

$$s_i(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{i,n}(k) e^{j2\pi\Delta f t} p(t - kT), \quad (1)$$

em que,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $T$  é o período do símbolo  $m$ -QAM,  $(k-1)T \leq t \leq kT$  é o intervalo de tempo correspondente ao  $k$ -ésimo símbolo transmitido e  $x_{i,n}(k)$  é o  $k$ -ésimo subsímbolo associado à  $n$ -ésima portadora  $m$ -QAM que é estatisticamente independente para quaisquer  $n$  e  $k$ . O pulso formatador  $p(u)$  é retangular com amplitude unitária e  $u \in [0, T]$ . A variável  $\Delta f < 1/T$  define o grau de superposição espectral entre as subportadoras que compõe o sinal  $s_i(t)$  da Eq. (1). O canal é considerado AWGN e o sinal que chega no receptor é dado por:

$$r(t) = s_i(t) + q(t), \quad (2)$$

em que,  $q(t)$  representa o ruído branco em banda-básica com distribuição gaussiana, densidade espectral de potência  $2N_0$  e média nula.

#### 3.2 Derivação do Modelo Discreto

O receptor de máxima verossimilhança (ML, do inglês Maximum Likelihood) visa maximizar a função de densidade de probabilidade de  $r(t)$  condicionada ao conhecimento do sinal transmitido  $s_i(t)$ . Este critério é a solução ótima para detecção dos símbolos em canais AWGN e pode ser implementado maximizando as  $M$  métricas de correlação  $C_k[r(t), s_i(t)]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, M$ , representada pela Eq. (3) [1,5]:

$$C_k[r(t), s_i(t)] = 2Re \left\{ \int_{(k-1)T}^{kT} r(t) s_i^*(t) dt \right\} - \int_{(k-1)T}^{kT} |s_i(t)|^2 dt. \quad (3)$$

em que  $M = m^N$  são as possíveis formas de onda. O segundo termo da Eq. (3) representa a energia  $E_i(k)$  do sinal  $s_i(t)$  transmitido no intervalo de tempo  $(k-1)T \leq t \leq kT$ . O primeiro termo do segundo membro da Eq. (3) pode ser reescrito substituindo  $s_i(t)$ , como definido na Eq. (1). Desta forma a Eq. (3) pode ser expressa por:

$$C_k[r(t), s_i(t)] = 2\text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x_{i,n}^*(k) \int_{(k-1)T}^{kT} r(t) e^{-j2\pi\Delta f t} dt \right\} - E_i(k). \quad (4)$$

Após implementar a métrica de correlação expressa pela Eq. (4) para todas as  $M$  possíveis formas de onda, o receptor ML decide pelo conjunto de subsímbolos  $[x_{0,i}(k), x_{1,i}(k), \dots, x_{N-1,i}(k)]$  que maximiza  $C_k[r(t), s_i(t)]$ . A Fig. 1 mostra a arquitetura do receptor ML:

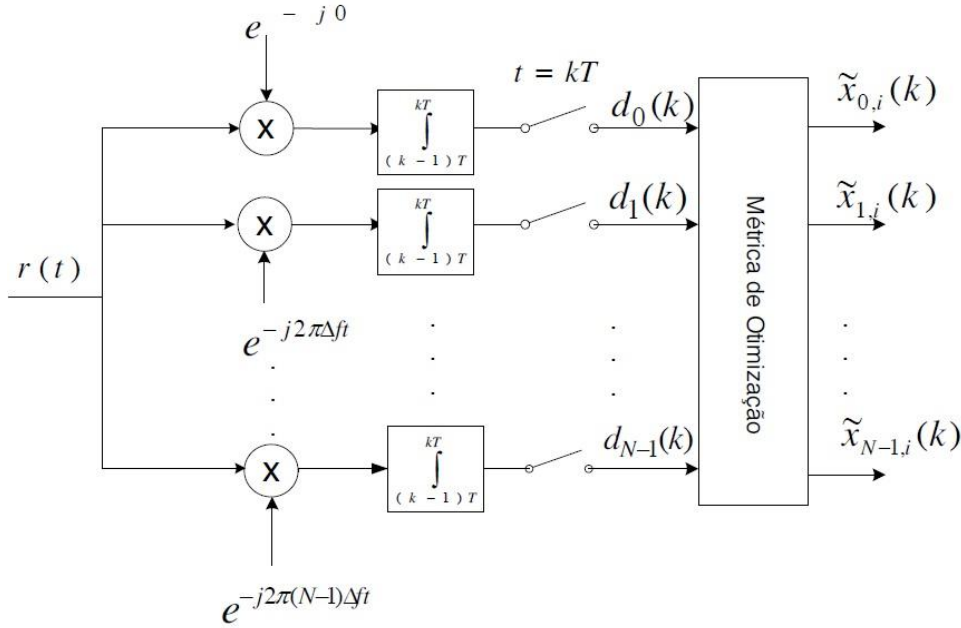


Fig. 1 – Arquitetura do receptor de máxima verossimilhança. [1,2]

Embora o critério ML seja a solução ótima, sua complexidade computacional cresce exponencialmente à medida que se aumenta o número de portadoras e/ou a ordem da modulação. Por exemplo, considere um sistema 4-QAM com 20 portadoras, o detector terá que calcular  $4^{20}$  métricas de correlação, resultando em um elevado custo computacional. A arquitetura mostrada na Fig. 1 permite a derivação de um modelo discreto, como é deduzido em [1,2], no qual o conjunto de amostras na saída do integrador pode ser representado como:

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{T}\mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{z}(k), \quad (5)$$

em que  $\mathbf{x}(k)$  é o vetor coluna dos  $N$  símbolos complexos transmitidos no instante  $k$ ,  $\mathbf{H}(k)$  é a matriz de transformação definida por:

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & h_{1,N-1}(\Delta f T, k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1,1}(\Delta f T, k) & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

em que  $h_{n,m}(\Delta f T, k) = \text{sinc}[(n-m)\Delta f T] e^{j2\pi(n-m)\Delta f T(k-1/2)}$  e o vetor  $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  representa a parcela de ruído complexo na saída do banco de  $N$  filtros integradores. Estatisticamente este ruído caracteriza-se por ter média nula e matriz de correlação entre as amostras do sinal de ruído em cada uma das portadoras no instante  $kT$  dado por  $E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}(k)^H] = TN_0\mathbf{H}(k)$ . Se o parâmetro  $\Delta f T = 1$ , a matriz  $\mathbf{H}(k)$  torna-se diagonal, o

ruído torna-se branco e o problema recai na detecção de sinais ortogonais. No entanto, se  $\Delta fT < 1$  a ortogonalidade é quebrada e, além do mais, o sistema passa a ser variante no tempo.

### 3.3 Detector de Erro Quadrático Médio Mínimo

O detector de erro quadrático médio mínimo (MMSE, do inglês Minimum Mean Square Error) realiza uma estimativa dos sinais transmitidos  $\{x_n(k), 0 \leq n \leq N - 1\}$  combinando linearmente os sinais recebidos  $d_n(k), 0 \leq n \leq N - 1$ . Esta combinação linear é representada na forma matricial [1,6]:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{W}^H(k)\mathbf{d}(k), \quad (6)$$

em que  $\mathbf{W}^H(k)$  é a matriz de filtragem  $N \times N$  no instante  $k$ , que minimiza o erro quadrático médio e é definida por  $\mathbf{W}(k) = [\mathbf{w}_0(k)\mathbf{w}_1(k)\mathbf{w}_2(k) \dots \mathbf{w}_{N-1}(k)]$ , as colunas  $\mathbf{w}_n(k) = [w_{n,0}(k)w_{n,1}(k) \dots w_{n,N-1}(k)]^H$  e  $n = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ . A função custo é o erro quadrático médio dada por:

$$J[\mathbf{W}(k)] = E\{\|\mathbf{e}(k)\|^2\} = \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{W}^H(k)\mathbf{d}(k)\|^2, \quad (7)$$

em que  $\|\mathbf{e}(k)\|$  representa a norma do vetor  $\mathbf{e}(k)$ . Minimizando a função custo  $J[\mathbf{W}(k)]$  em relação aos vetores  $\mathbf{w}_n(k)$ , temos os seguintes passos:

$$\frac{\partial J[\mathbf{W}(k)]}{\partial \mathbf{w}_n(k)} = -2E\{x_n^*(k)\mathbf{d}(k)\} + 2\mathbf{R}_{dd}\mathbf{w}_n(k),$$

$$\frac{\partial J[\mathbf{W}(k)]}{\partial \mathbf{w}_n(k)} = 0,$$

$$\mathbf{w}_{o,l}(k) = \mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{p}_l(k), \quad (8)$$

em que  $\mathbf{w}_{o,l}(k)$  é o filtro que minimiza o erro quadrático médio referente a  $l$ -ésima portadora,  $\mathbf{R}_{dd} = E\{\mathbf{d}(k)\mathbf{d}(k)^H\} = \mathbf{H}(k)\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}(k)^H + N_0T\mathbf{H}(k)$ ,  $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{d}(k)\mathbf{d}(k)^H\}$ ,  $\mathbf{p}_l(k) = E\{x_l^*(k)\mathbf{d}(k)\}$  e  $E\{\mathbf{z}(k)\mathbf{z}(k)^H\} = N_0T\mathbf{H}(k)$ . Portanto,  $\mathbf{W}_o(k) = [\mathbf{w}_{o,0}(k) \mathbf{w}_{o,1}(k) \mathbf{w}_{o,2}(k) \dots \mathbf{w}_{o,N-1}(k)]$  é a matriz transformação ótima que combina linearmente as amostras recebidas, como mostrado na Eq. (6). No caso específico deste trabalho,  $\mathbf{R}_{xx} = \sigma_{xx}^2\mathbf{I}$ , em que  $\sigma_{xx}^2$  é a potência de cada subsímbolo transmitido,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade,  $\mathbf{H}(k)^H = \mathbf{H}(k)$ , portanto  $\mathbf{R}_{dd} = \sigma_{xx}^2\mathbf{H}(k)\mathbf{H}(k) + N_0T\mathbf{H}(k)$ . O vetor  $\mathbf{p}_l(k)$  é dado por:

$$\mathbf{p}_l(k) = [E\{x_l^*(k)d_1(k)\} \dots E\{x_l^*(k)d_{N-1}(k)\}]^T,$$

de maneira que:

$$E\{x_l^*(k)d_n(k)\} = \sum_{m=0}^{N-1} E\{x_l^*(k)x_m(k)\}h_{n,m}(\Delta fT, k) + E\{x_l^*(k)z_n(k)\},$$

$$E\{x_l^*(k)d_n(k)\} = \sigma_{xx}^2h_{n,l}(\Delta fT, k). \quad (9)$$

Pela Eq. (9) [1,2], podemos notar que:

$$\mathbf{p}_l(k) = \sigma_{xx}^2 [ h_{0,l}(\Delta fT, k) \quad \dots \quad h_{l-1,l}(\Delta fT, k) \quad 1 \\ h_{l+1,l}(\Delta fT, k) \quad \dots \quad h_{N-1,l}(\Delta fT, k) ]^T.$$

Utilizando a Eq. (8), temos que a matriz ótima  $\mathbf{W}_o(k)$  é:

$$\mathbf{W}_o(k) = [ \mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{p}_0(k) \quad \mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{p}_1(k) \quad \dots \quad \mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{p}_{N-1}(k) ],$$

e colocando  $\mathbf{R}_{dd}^{-1}(k)$  em evidência temos:

$$\mathbf{W}_o(k) = \sigma_{xx}^2\mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{H}(k),$$

$$\mathbf{W}_o(k) = \sigma_{xx}^2(\sigma_{xx}^2)^{-1}(\mathbf{H}(k)\mathbf{H}(k) + \frac{N_0T}{\sigma_{xx}^2}\mathbf{H}(k))^{-1}\mathbf{H}(k),$$

$$\mathbf{W}_o(k) = (\mathbf{H}(k)\mathbf{H}(k) + \frac{T}{SNR}\mathbf{H}(k))^{-1}\mathbf{H}(k), \quad (10)$$

em que  $SNR = \frac{\sigma_{xx}^2}{N_0}$  representa a relação sinal-ruído. A Fig. 2 mostra a arquitetura do receptor com minimização de erro quadrático médio:

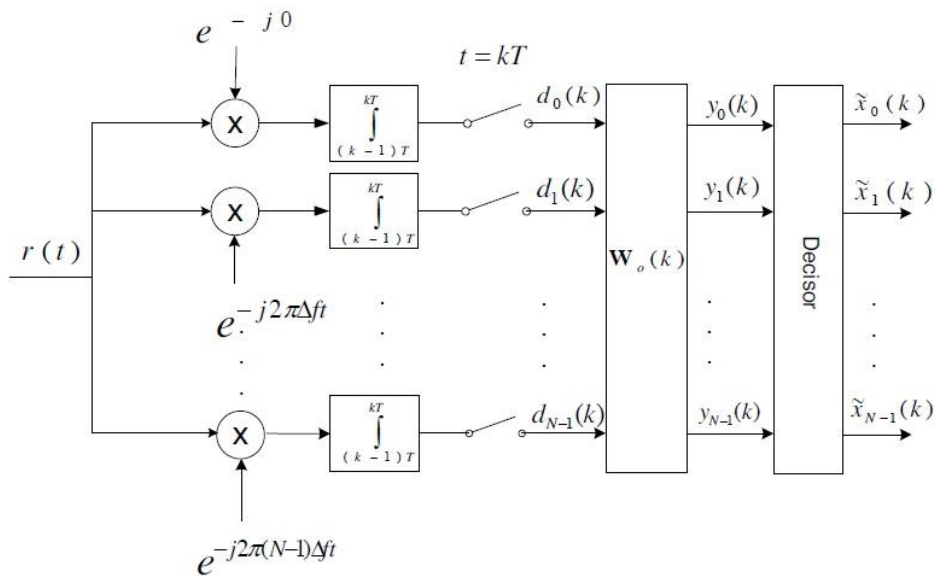


Fig. 2 – Arquitetura do receptor de erro quadrático médio mínimo. [1,2]

#### 4. Resultados e Discussão

Utilizando os resultados de desempenho para o detector ML [1,2] e simulando a arquitetura MMSE descrita na Fig. 2, obteve-se a taxa de erro de bits (BER, *Bit Error Rate*) do sistema para o caso de duas e cinco portadoras 4-QAM com diferentes valores de  $\Delta fT$ . A Fig. 3 apresenta as curvas de BER dos receptores ML e MMSE considerando duas portadoras e grau de superposição  $\Delta fT = 0,6$ . Observa-se uma perda de 1,3 dB no detector MMSE em relação ao ML. A Fig. 4 ilustra as curvas de BER para o caso de cinco portadoras e  $\Delta fT = 0,73$ . Comparando as Fig. 3 e Fig. 4 verifica-se um aumento na perda de desempenho do receptor MMSE, o que nos mostra que o aumento do número de portadoras causa uma degradação no desempenho dos receptores lineares.

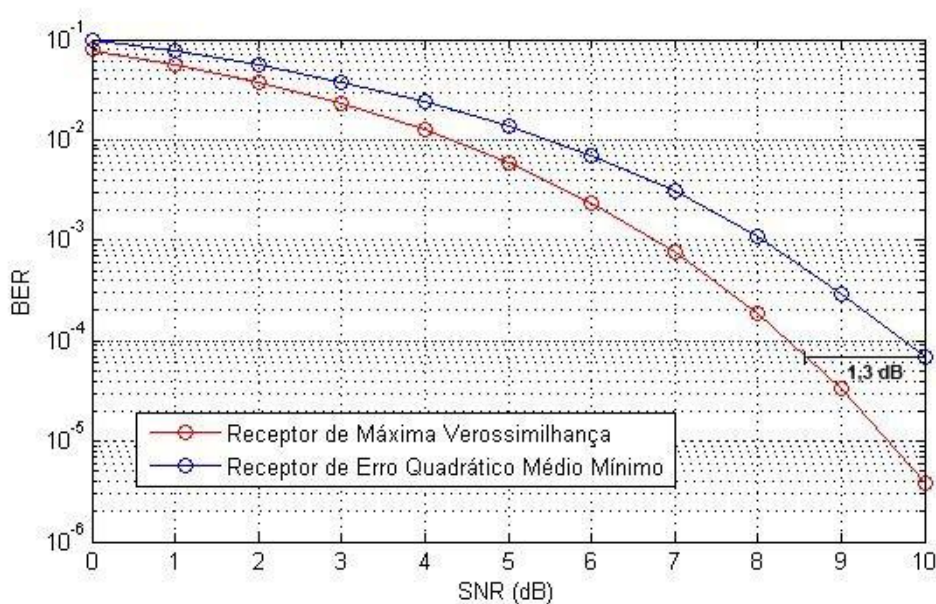


Fig. 3 – Taxa de erro de bits para o detector ML e MMSE para  $N = 2$  e  $\Delta f = 0,6$ .

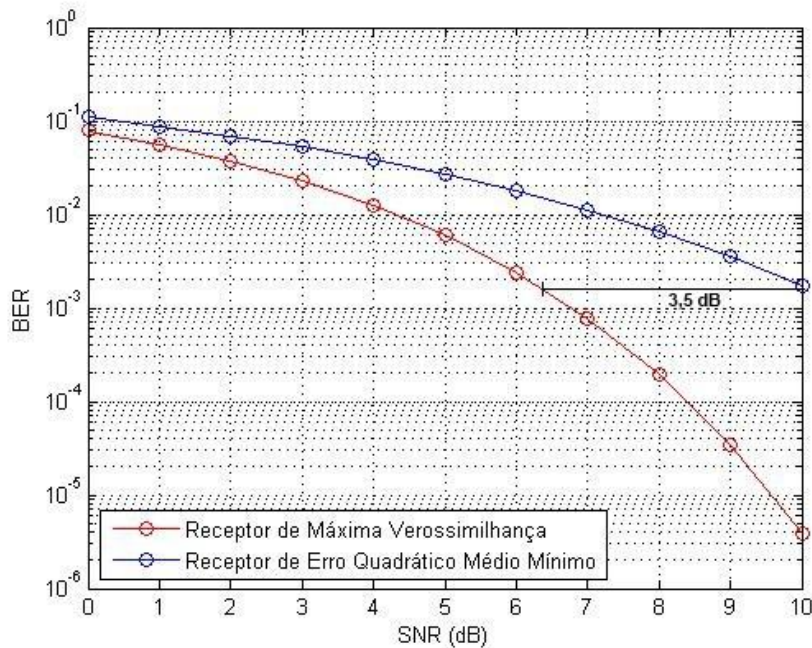


Fig. 4 – Taxa de erro de bits para o detector ML e MMSE para  $N = 5$  e  $\Delta f = 0,73$ .

## 5. Conclusão

Foi analisado neste trabalho o problema de comunicação com  $N$  portadoras não-ortogonais visando o desenvolvimento de técnicas de detecção. Para isso, foi proposta a arquitetura de receptor MMSE. A complexidade do receptor MMSE proposto é bem menor do que a complexidade do receptor ML. Seu desempenho foi avaliado e observou-se uma perda de 1,3 dB com relação ao detector ML para o caso de duas portadoras e grau de superposição  $\Delta fT = 0,6$  e uma perda de 3,5 dB com cinco portadoras e grau de superposição  $\Delta fT = 0,73$ . Portanto, nota-se uma perda de desempenho com o aumento do número de portadoras.

Dos resultados apresentados, fica evidente a importância de novas pesquisas de arquiteturas sub-ótimas e de baixa complexidade que se aproximem ainda mais do desempenho do receptor ML.

## 6. Referências

- [1] ARAUJO, Daniel Costa, A. M. P. Lucena. "Sistema de comunicação com Múltiplas Portadoras m-QAM Não-Ortogonais", Brasília, DF: XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Setembro/2012.
- [2] ARAUJO, Daniel Costa. "Sistemas de Comunicações com Sinais m-QAM Não-Ortogonais". 2012. 72 f. Dissertação (Mestrado em Teleinformática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2012.
- [3] Kozek, W.; Molisch, A.F.; "Nonorthogonal pulseshapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels.", Selected Areas in Communications, IEEE Journal on, vol.16, no.8, pp.1579-1589, Oct 1998 doi:10.1109/49.730463.
- [4] Schafhuber, D.; Matz, G.; Hlawatsch, F.; "Pulse-shaping OFDM/BFDM systems for time-varying channels: ISI/ICI analysis, optimal pulse design, and efficient implementation," Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2002. The 13th IEEE International Symposium on , vol.3, no., pp. 1012- 1016 vol.3, 15-18 Sept. 2002 doi: 10.1109/PIMRC.2002.1045180.
- [5] J. G. Proakis, "Digital Communications", 4rd ed. New York, Mc-GrawHill, 2007.
- [6] A. Goldsmith, Wireless Communications, Cambridge University Press, 2005.
- [7] Lucena, A.M.P.; Mota, J.C.M.; Cavalcante, C.C.; "Optimum detection of non-orthogonal QAM signals with spectral overlap-ping", Communications, IET, vol.3, no.2, pp.249-256, February 2009 doi: 10.1049/iet-com:20080157.

## 7. Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro dado a esta pesquisa.