

A manobra assistida por gravidade abrindo as portas para o sistema solar exterior

The gravity assisted maneuver opening the doors to the exterior solar system

Antonio F. B. A. Prado^{*1}

¹Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Divisão de Pós-Graduação, São José dos Campos, SP, Brasil.

Recebido em 26 de fevereiro de 2021. Aceito em 05 de abril de 2021

O objetivo do presente trabalho é descrever a manobra assistida por gravidade, um dos pilares da exploração espacial, principalmente no que se refere aos planetas mais distantes do Sol, como Júpiter e Saturno. Essa manobra é também conhecida como manobra de *swing-by*. Seu objetivo é alterar a velocidade, energia e momento angular de um veículo espacial através de uma passagem próxima a um corpo celeste massivo, como os planetas do Sistema Solar. Inicialmente, é apresentada uma revisão histórica desse tópico, citando as principais referências teóricas e aplicadas relacionadas a esse item. A seguir, é feito um tratamento matemático desse problema com base numa seqüência de interações de dois corpos, utilizando cálculo vetorial básico. Os resultados principais são derivados a partir desse modelo simples.

Palavras chaves: Astrodinâmica, Swing-by, Manobras Orbitais, Missões Espaciais, Engenharia Espacial.

The objective of the present article is to describe the gravity-assisted maneuver, one of the pillars of space exploration, especially with respect to the most distant planets from the Sun, such as Jupiter and Saturn. This maneuver is also known as a *swing-by* maneuver. Its objective is to change the velocity, energy and angular momentum of a space vehicle using a passage close to a massive celestial body, like the planets of the Solar System. Initially, a historical review of this topic is presented, showing the main theoretical and applied references related to this item. Next, a mathematical treatment of this problem is made based on a sequence of interactions of two bodies, using basic vector calculus. The main results are derived from this simple model.

Keywords: Astrodynamics, Swing-by, Orbital Maneuvers, Space Missions, Space Engineering.

1. Revisão Histórica

A importância das trajetórias assistidas pela gravidade (ou manobra de *swing-by*) pode ser bem entendida pelo número de missões que voaram ou estão programadas para voar usando essa técnica. Um exemplo bem sucedido foi o das missões Voyager I e II, que voaram para os planetas exteriores (a partir de Júpiter) do Sistema Solar com o uso de *swing-bys* sucessivos nos planetas visitados, onde ganharam energia [1]. Além dessa missão, as trajetórias *swing-by* têm uma variedade de aplicações, tais como:

- o uso do planeta Vênus para uma viagem da Terra até Marte [2–4];
- o uso do planeta Júpiter para fazer uma forte alteração na inclinação do plano orbital de uma nave espacial, de modo que ela seja transferida para uma órbita que tenha um plano orbital perpendicular a eclíptica. Essa manobra já foi realizada na prática, com a finalidade de enviar um veículo espacial para observar os polos do Sol na missão Ulysses [5];

- o uso de *swing-by* com a Terra, ou outro planeta interior, para fornecer energia suficiente a um veículo espacial para que ele atinja o exterior do Sistema Solar [6–9];
- o uso da Lua para lançar uma nave espacial para uma órbita elíptica ou hiperbólica que termine em escape da Terra [10];
- o uso de sucessivos *swing-bys* com a Lua para obter geometrias desejáveis nas órbitas das naves espaciais ao redor da Terra, tais como os satélites que observam fenômenos solares, conforme visto em [11, 12];
- o uso de múltiplos *swing-bys* com propulsão nos satélites de um grande planeta (Júpiter ou Saturno) para investigar esses satélites. Métodos de otimização são aplicados nesse caso para economizar o combustível usado na parte propulsiva da missão [13–15]. O número de *swing-by* neste tipo de missão é, em geral, superior a dez.

Estudos mais recentes consideram o efeito de outras forças, como aplicação de propulsão combinada com a passagem próxima [16, 17]; presença de uma atmosfera no corpo mais próximo [18]; uso de cabos espaciais para aumentar o efeito da manobra [19]; presença de mais corpos no sistema dinâmico [20]; etc.

* Endereço de correspondência: antonio.prado@inpe.br

Todas as aplicações citadas acima estão no campo da Astronáutica, sendo que todas elas são muito recentes se comparadas à literatura no campo da Astronomia. A mecânica celeste do *swing-by* já é conhecida pelos astrônomos há cerca de 150 anos. Laplace entendeu o mecanismo completo da manobra assistida pela gravidade. Posteriormente, alguns pesquisadores derivaram equações analíticas para os efeitos do *swing-by* e/ou produziram resultados numéricos neste tópico, especialmente no problema de escape e captura de cometas por Júpiter [21], que é essencialmente o mesmo problema.

O conceito de manobra assistida pela gravidade, no programa espacial americano, apareceu inicialmente no JPL (Jet Propulsion Laboratory), no início dos anos sessenta. Um dos primeiros documentos do JPL em que encontramos esse assunto é um *Memorando* (312-130) elaborado por M. Minovich [22], datado de 23 de agosto de 1961. Esse documento contém as fórmulas para os cálculos das alterações na energia e no semi-eixo maior de uma órbita elíptica. Um estudo histórico referente a era pré-espacial pode ser encontrado em [23].

Desde a década de 1970, muitas aplicações foram feitas com a manobra assistida pela gravidade, incluindo missões múltiplas planetárias. Esse caso particular engloba, especialmente, a grande viagem entre os planetas feita pelas Voyager I e II já citadas no presente artigo, e que se encontra detalhada em Flandro [24]. Outras numerosas aplicações são bem conhecidas para serem descritas em detalhes neste trabalho. Algumas delas são:

- 1973-74: - Mariner 10 para Vênus + Mercúrio + Mercúrio;
- 1972: - Pioneer 10 para Júpiter + exterior do Sistema Solar;
- 1973: - Pioneer 11 para Júpiter + Saturno + exterior do Sistema Solar;
- 1977: - Voyager 2 para Júpiter + Saturno + Urano + Netuno + exterior do Sistema Solar;
- 1989: - Galileo para Vênus + Terra + Marte + Júpiter + satélites de Júpiter;
- 1990: - Ulisses para Júpiter + Sol (fora da eclíptica).

2. Descrição Matemática do Swing-By

Para um estudo com modelagem simplificada, podemos supor que a manobra seja dividida em várias etapas. O modelo simples de dois corpos é utilizado para cada uma dessas etapas. Essa abordagem é usualmente chamada de *patched conics*. Essa descrição é baseada em [21, 25].

Considera-se que o sistema é formado por três corpos: M_1 , um corpo massivo no centro do sistema cartesiano; M_2 , um corpo menor, um planeta ou satélite de M_1 em uma órbita kepleriana em torno de M_1 ; M_3 , uma nave espacial ou uma partícula com massa infinitesimal que está viajando em uma órbita qualquer ao redor de M_1 , quando faz uma passagem próxima com M_2 . Este encontro altera a órbita de M_3 em relação a M_1 .

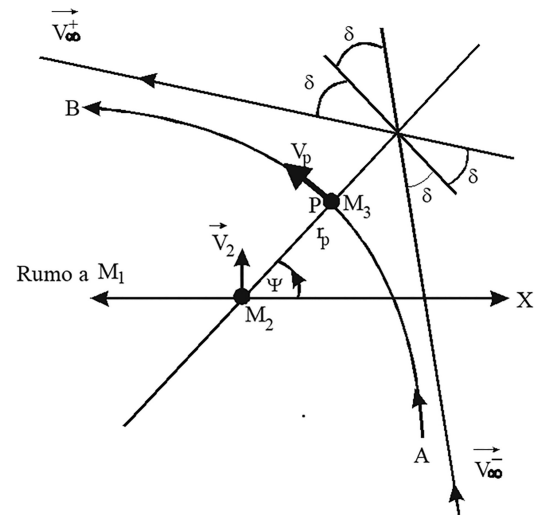


Figura 1: A manobra de *swing-by* e algumas de suas variáveis.

Esse fenômeno é chamado de manobra de *swing-by*. De acordo com estas hipóteses, as órbitas de M_1 e M_2 não se alteram. A Figura 1 descreve o evento e mostra algumas das variáveis envolvidas.

As variáveis são:

- \vec{V}_2 = a velocidade de M_2 em relação a M_1 ;
- $\vec{V}_\infty^-, \vec{V}_\infty^+$ = vetores velocidade da nave espacial relativos a M_2 , antes e depois do encontro, respectivamente;
- \vec{V}_i, \vec{V}_o = vetores velocidade da nave espacial relativos a M_1 , antes e depois do encontro, em um referencial inercial, respectivamente;
- δ = metade do ângulo de curvatura da trajetória de M_3 em relação a M_2 (o ângulo entre \vec{V}_∞^- e \vec{V}_∞^+);
- r_p = a distância de máxima aproximação durante o encontro (ponto P) entre M_2 e M_3 ;
- Ψ = o ângulo entre a linha do periapsis (linha conectando M_2 a P) e a linha M_1 - M_2 .

Para encontrar as equações necessárias é preciso, em primeiro lugar, usar a teoria de órbitas hiperbólicas, com o objetivo de se obter uma expressão para δ . Esta expressão pode ser facilmente encontrada na literatura [21]:

$$\text{sen}(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} \quad (1)$$

onde: $\mu_2 = Gm_2$, sendo G a constante universal da gravitação e m_2 a massa do segundo corpo.

A partir desta equação e da Figura 1, é possível identificar que as variáveis independentes que descrevem completamente uma manobra *swing-by* são as seguintes:

- (i) $|\vec{V}_\infty|$, a magnitude da velocidade da nave espacial no infinito, em relação a M_2 , antes ou depois da passagem próxima;
- (ii) r_p , a distância do periapse;

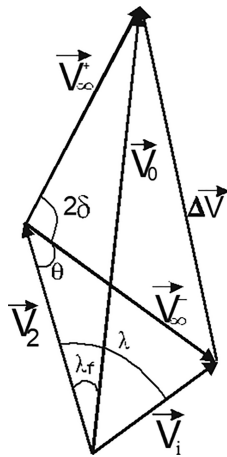


Figura 2: Soma de vetores velocidade envolvidos em uma manobra de *swing-by*.

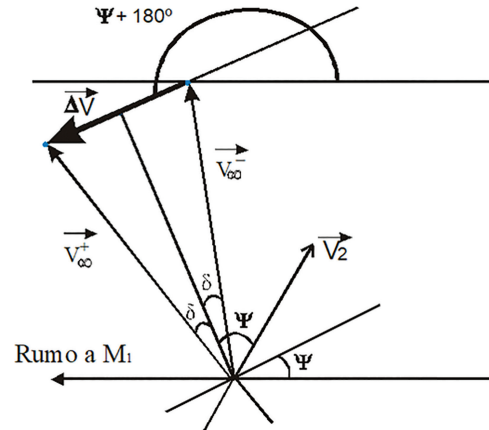


Figura 3: Vetores velocidade envolvidos em uma manobra de *swing-by*.

(iii) Ψ , o ângulo de aproximação.

O método aproximado conhecido na literatura como *patched conics* tem, então, as seguintes três etapas:

- (i) Na primeira etapa, o efeito gravitacional de M_2 é desconsiderado, e o movimento de M_3 em torno de M_1 é tomado como sendo uma órbita kepleriana;
- (ii) Na segunda etapa, supõe-se que M_3 entra na esfera de influência de M_2 . Então, a velocidade \vec{V}_∞^- é calculada a partir da equação abaixo:

$$\vec{V}_\infty^- = \vec{V}_i - \vec{V}_2 \tag{2}$$

A Figura 2 mostra a soma de vetores que explica a origem da equação (2).

A Figura 3 mostra uma visão das grandezas vetoriais envolvidas. O efeito de M_1 é desconsiderado. O movimento de M_3 ao redor de M_2 é hiperbólico no caso dessa manobra. Nessa órbita hiperbólica, a nave espacial M_3 é desviada por M_2 e seu vetor velocidade (com relação a M_2) gira de um ângulo 2δ , mas mantém sua magnitude constante, pela conservação da energia no problema de dois corpos. Então, a nave espacial cruza novamente a esfera de influência de M_2 e a abandona, para retornar a uma órbita kepleriana em torno de M_1 . Neste ponto, a velocidade \vec{V}_∞^+ é dada por:

$$\vec{V}_\infty^+ = \vec{V}_o - \vec{V}_2 \tag{3}$$

(iii) Após atingir essa condição, a nave espacial está em uma nova órbita kepleriana ao redor de M_1 e o *swing-by* está completo.

O estudo das diferenças entre as órbitas anteriores e posteriores a esse encontro (etapas i e iii) será desenvolvido a seguir.

A primeira quantidade importante a ser calculada é a variação de velocidade no referencial inercial com relação a M_1 . Ela é dada por $\vec{\Delta V} = \vec{V}_o - \vec{V}_i$, que representa a

diferença entre as velocidades inerciais antes e depois do *swing-by*. A partir de um diagrama de adição de vetores (Figuras 2 e 3), é possível demonstrar que [21]:

$$\Delta V = |\vec{\Delta V}| = 2|\vec{V}_\infty| \sin(\delta) = 2V_\infty \sin(\delta) \tag{4}$$

e que $\vec{\Delta V}$ faz um ângulo $\Psi + 180^\circ$ com a linha M_1-M_2 (ver Figura 3). Essa geometria fornece as seguintes componentes para o incremento de velocidade:

$$\Delta \dot{X} = -2V_\infty \sin(\delta) \cos(\Psi) \tag{5a}$$

$$\Delta \dot{Y} = -2V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \tag{5b}$$

A segunda quantidade importante a ser obtida é a variação do momento angular H . Partindo de sua definição, é possível obter a expressão $H = X\dot{Y} - Y\dot{X}$, o que resulta na equação $\Delta H = X(\Delta\dot{Y}) + (\Delta X)\dot{Y} - Y(\Delta\dot{X}) + (\Delta Y)\dot{X}$ para sua primeira variação. Esta equação se torna $\Delta H = R(\Delta\dot{Y})$, utilizando a condição de que o encontro é instantâneo ($\Delta X = \Delta Y = 0$) e que em $t = 0$, $X = R$ e $Y = 0$. Então, combinando esse resultado com a expressão de $\Delta\dot{Y}$ (Equação (5b)), temos:

$$\omega \Delta C = -2V_2 V_\infty \sin(\delta) \sin(\Psi) \tag{6}$$

A terceira e última quantidade derivada aqui é a variação da energia. Isso pode ser feito por subtração direta da energia após e antes do encontro. Assim sendo, podemos escrever que:

$$E_+ = \frac{1}{2}[(\dot{X} + \Delta\dot{X})^2 + (\dot{Y} + \Delta\dot{Y})^2]$$

$$E_- = \frac{1}{2}[(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2]$$

O resultado obtido com essa subtração é:

$$\Delta E = E_+ - E_- = 2V_\infty \sin(\delta) [2V_\infty \sin(\delta) - (\dot{X} \cos(\Psi) + \dot{Y} \sin(\Psi))] \tag{7}$$

Esta equação pode ser simplificada [21] para:

$$\Delta E = -2V_2V_\infty \sin(\delta)\sin(\Psi) \quad (8)$$

Olhando para as equações (6) e (8), um resultado fundamental pode ser encontrado:

$$\Delta E = \omega \Delta C \quad (9)$$

Algumas conseqüências importantes dessas equações podem ser derivadas estudando a equação (8) em maior detalhe. Os parâmetros $|\vec{V}_2|$ e $|\vec{V}_\infty|$ são quantidades positivas (eles são as magnitudes dos dois vetores), assim como o $\sin(\delta)$ (porque $0^\circ < \delta < 90^\circ$). Então, o único parâmetro que afeta o sinal de ΔE é o $\sin(\psi)$.

A conclusão é que, para valores de ψ no intervalo $0^\circ < \psi < 180^\circ$, ΔE é negativo (decrece em energia) e, para ψ no intervalo $180^\circ < \psi < 360^\circ$, ΔE é positivo (aumenta em energia).

Então, as conclusões finais são:

- Se o *swing-by* ocorre na frente de M_2 ($0^\circ < \psi < 180^\circ$), há um decréscimo na energia de M_3 , com uma perda máxima quando $\psi = 90^\circ$ ($\Delta \vec{V}$ oposto a \vec{V}_2);
- Se o *swing-by* ocorre atrás de M_2 ($180^\circ < \psi < 360^\circ$), há um aumento na energia de M_3 , com um ganho máximo quando $\psi = 270^\circ$ ($\Delta \vec{V}$ na direção de \vec{V}_2).

A Figura 2 mostra claramente como foi possível obter um aumento na velocidade (logo, em energia), a partir de uma passagem próxima por um corpo celeste. Lembre-se de que essa energia é medida com relação ao corpo principal M_1 e ela é obtida à custa de uma redução da energia de translação do planeta (M_2) em torno de M_1 .

3. Exemplo de uma Manobra Gravitacionalmente Assistida

Como um exemplo prático de uma manobra gravitacionalmente assistida, vamos considerar o seguinte problema. Suponha que uma nave espacial seja lançada da Terra em direção a Júpiter, conforme mostrado na Figura 4. Considere que os parâmetros que definem a manobra sejam dados como abaixo (duas situações diferentes serão consideradas, mostradas nos casos a e b).

- (a) $|\vec{V}_\infty| = 10$ km/s; $r_p = 1,2 R_j = 85644$ km (onde R_j é o raio de Júpiter); $\psi = 90^\circ$; $\mu_j = Gm_j = 1,26 \times 10^{17}$ m³/s²
- (b) $|\vec{V}_\infty| = 10$ km/s; $r_p = 1,2 R_j = 85644$ km; $\psi = 270^\circ$; $\mu_j = Gm_j = 1,26 \times 10^{17}$ m³/s²

Com esses dados, é possível calcular os valores do ângulo de curvatura (δ) e as magnitudes das variações em velocidade $|\vec{V}_\infty|$ e energia (ΔE). A solução pode ser obtida a partir dos seguintes passos.

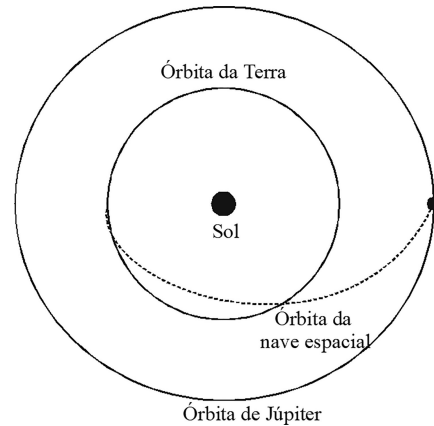


Figura 4: Órbita da nave espacial.

Para o cálculo de δ , vale a equação (1):

$$\sin(\delta) = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_2}} = 0,9367,$$

que implica em $\delta = 69,51^\circ$.

Para a magnitude da variação da velocidade, vale a equação (4):

$$\Delta V = 2V_\infty \sin(\delta) = 18,734 \text{ km/s}.$$

Finalmente, para o cálculo da variação da energia, podemos usar a equação

$$\Delta E = 2V_2V_\infty \sin(\delta)\sin(\psi) = 245,41 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

para $\psi = 90^\circ$ e $245,41 \text{ km}^2/\text{s}^2$ para $\psi = 270^\circ$.

Este último resultado serve para comparar as conclusões obtidas neste trabalho sobre a questão de ganho ou perda de energia.

4. Mudança de uma Órbita Devido ao *Swing-By*

Esta seção tem por objetivo o cálculo da alteração de uma trajetória interplanetária devido a um *swing-by*, considerando toda a trajetória, e não olhando apenas para a etapa da passagem próxima.

Por trajetória interplanetária entende-se a trajetória que um veículo espacial descreve em torno do corpo de maior massa (o Sol, no caso do Sistema Solar). A alteração dessa trajetória ocorre devido ao *swing-by* que o veículo espacial executa quando passa próximo a um corpo de menor massa e que também orbita o corpo principal. Depois de executada essa passagem, o veículo espacial tem alterada sua trajetória em relação ao corpo de massa maior. O objetivo é calcular a nova trajetória, a partir da anterior e dos parâmetros que descrevem o *swing-by*. Será suposto que a distância do periapsis r_p pode ser controlada, mas que os parâmetros ψ e

$|\vec{V}_\infty|$ são obtidos a partir da órbita inicial do veículo espacial e da órbita (tomada como circular) do planeta. O equacionamento será desenvolvido a partir do exemplo mostrado abaixo.

Suponha que um veículo espacial esteja em uma órbita elíptica em torno do Sol, com $r_p = 150 \times 10^6$ km e $r_a = 1000 \times 10^6$ km, respectivamente os raios do periapsis e do apoapsis. Vamos calcular os valores do semi-eixo maior, excentricidade, momento angular e energia dessa órbita. Vamos supor também que esse veículo espacial faça um *swing-by* com Júpiter, a uma distância tal que $r_p = 10^5$ km, com ψ e $|\vec{V}_\infty|$ dados pela mecânica celeste de dois corpos. Com isso, vamos obter os novos valores do semi-eixo maior, excentricidade, momento angular e energia para esse veículo após o encontro com Júpiter. Vamos também verificar se a órbita desse veículo é aberta/fechada e direta/indireta antes e depois dessa manobra.

Vamos assumir os seguintes dados:

$$\mu_s = Gm_s = 1,33 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\mu_j = Gm_j = 1,26 \times 10^{17} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Distância entre Sol e Júpiter = $7,78 \times 10^8$ km.

Velocidade de Júpiter em torno do Sol = 13,10 km/s.

A Figura 5 mostra as trajetórias envolvidas. Nota-se a existência de dois pontos para o possível encontro, denominados A e B. Para resolver esse problema, a primeira tarefa a ser executada é a obtenção dos elementos keplerianos da órbita do veículo espacial antes do *swing-by*. Isso pode ser efetuado da seguinte maneira:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{150 \times 10^6 + 1000 \times 10^6}{2} = 575 \times 10^6 \text{ km}$$

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{1,50 \times 10^8}{5,75 \times 10^8} = 0,739$$

$$E = \frac{\mu_s}{2a} = \frac{1,33 \times 10^{11}}{2(5,75 \times 10^8)} = -115,65 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$C = \sqrt{\mu_s a (1 - e^2)}$$

$$= \sqrt{(1,33 \times 10^{11})(5,75 \times 10^8)(1 - 0,739^2)}$$

$$= 5,89 \times 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$$

Feito isso, vamos supor que o encontro ocorra no ponto A mostrado na Figura 5. Agora é preciso encontrar a

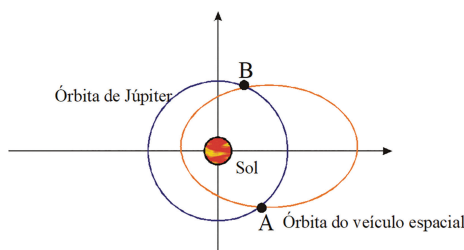


Figura 5: Órbitas envolvidas na manobra.

velocidade do veículo espacial em relação ao planeta no momento do encontro. Para isso, executamos os passos mostrados abaixo.

(i) Cálculo da magnitude da velocidade do veículo espacial em relação ao Sol $|\vec{V}_i|$

Sabemos que a distância entre o veículo e o Sol, nesse instante, é igual a distância entre o Sol e Júpiter (tomada como constante). Sendo assim, desconsiderando o efeito gravitacional de Júpiter, temos:

$$|\vec{V}_i| = \sqrt{\mu_s \left(\frac{2}{r_{SJ}} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$= \sqrt{(1,33 \times 10^{11}) \left(\frac{2}{7,88 \times 10^8} - \frac{1}{5,75 \times 10^8} \right)}$$

$$= 10,52 \text{ km/s}$$

(ii) Cálculo da anomalia verdadeira do veículo espacial no instante do encontro

Para efetuar essa tarefa, basta utilizar a expressão $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$. Sabendo que $r = r_{SJ}$ temos:

$$r_{SJ} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{a(1 - e^2)}{r_{SJ}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{0,739} \left(\frac{5,75 \times 10^8(1 - 0,739^2)}{7,78 \times 10^8} - 1 \right) = 0,899$$

Esse resultado nos fornece duas possíveis soluções: $\theta_A = 154^\circ$ e $\theta_B = -154^\circ$, que correspondem aos pontos A e B da Figura 5. Vamos prosseguir os cálculos supondo que o encontro ocorra no ponto A.

(iii) Cálculo do ângulo entre a velocidade inercial do veículo espacial antes do encontro com Júpiter e a velocidade de Júpiter

Dado que foi suposto que a órbita de Júpiter é circular, esse ângulo corresponde ao chamado *flight path angle*, que é dado pela expressão:

$$\tan \gamma = \frac{e \sin \theta_A}{1 + e \cos \theta_A} = \frac{0,739 \sin(154^\circ)}{1 + (0,739)(\cos 154^\circ)}$$

$$= 0,96 \Rightarrow \gamma_A = 43,9^\circ \text{ ou } \gamma_B = 223,9^\circ$$

A possibilidade de ocorrência de dois valores para γ , defasados de 180, decorre do fato da órbita poder ser tanto anti-horária ($\gamma_A = 43,9^\circ$) quanto horária ($\gamma_B = 223,9^\circ$). Será considerado daqui em diante que a órbita inicial seja anti-horária e a solução correta seja $\gamma_A = 43,9^\circ$. A Figura 6 mostra essas duas opções, onde $|\vec{V}_{i1}|$ = Velocidade inercial da órbita anti-horária e $|\vec{V}_{i2}|$ = Velocidade inercial da órbita horária. A obtenção dessa expressão pode ser feita conforme mostrado abaixo, usando a Figura 6.

$\tan \gamma = \frac{V_r}{rV_\theta}$, onde V_r é a velocidade radial do veículo espacial, V_θ é a velocidade angular do veículo espacial

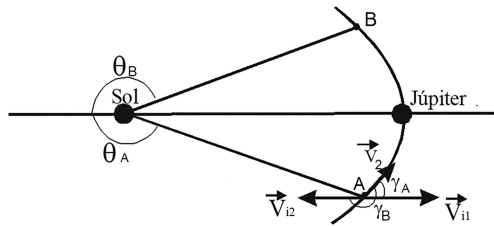


Figura 6: Ângulos entre as velocidades \vec{V}_2 e \vec{V}_i .

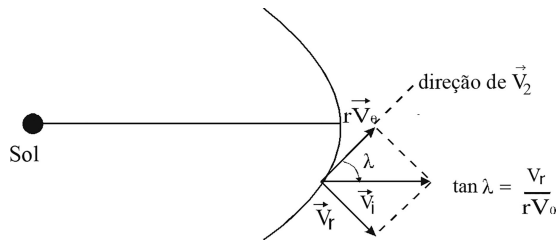


Figura 7: Velocidades envolvidas na manobra.

e r a distância desse veículo ao corpo central. Isso pode ser visto a partir da Figura 7.

A partir daí, temos:

$$\tan \gamma = \frac{V_r}{r V_\theta} = \left(\frac{1}{r}\right) \left(\frac{dr}{dt}\right) \frac{1}{(d\theta/dt)} = \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

Utilizando agora a equação polar da elipse,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \text{ temos } \frac{dr}{d\theta} = \frac{a(1 - e^2)e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}.$$

Logo:

$$\tan \gamma = \left(\frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)}\right) \left(\frac{a(1 - e^2)e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2}\right) = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

(iv) Cálculo da magnitude da velocidade do veículo espacial com relação a Júpiter

A Figura 8 mostra a soma vetorial envolvida.

Conhecemos os elementos $|\vec{V}_2| (= V_2)$, $|\vec{V}_i| (= V_i)$ e γ dessa figura, logo podemos utilizar a lei dos cossenos para a obtenção de $|\vec{V}_\infty^-| (= V_\infty^-)$:

$$\begin{aligned} |\vec{V}_\infty^-| &= \sqrt{V_i^2 + V_2^2 - 2V_i V_2 \cos(\gamma)} \\ &= \sqrt{(10,52)^2 + (13,10)^2 - 2(10,52)(13,10) \cos(43,9^\circ)} \\ &= 9,15 \text{ km/s} \end{aligned}$$

(v) Cálculo do ângulo entre a velocidade inercial do veículo espacial e a velocidade de Júpiter

A partir da mesma Figura 8, podemos utilizar de novo a lei dos cossenos, com os lados V_2 e V_∞^- . Temos:

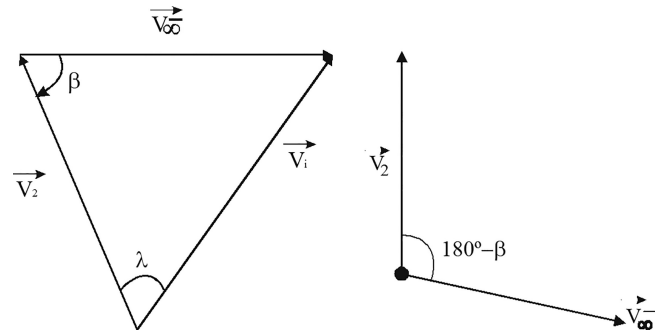


Figura 8: Soma vetorial envolvida no *swing-by*.

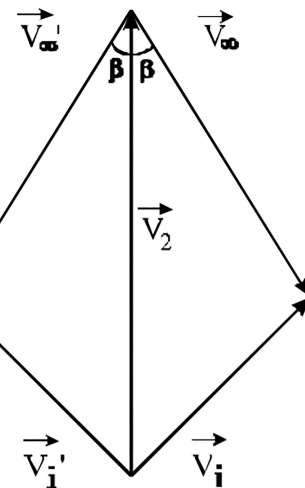


Figura 9: Possibilidades para o ângulo β .

$$\begin{aligned} V_i^2 &= V_2^2 + V_\infty^{-2} - 2V_2 V_\infty^- \cos \beta \\ \Rightarrow \cos \beta &= \frac{V_i^2 - V_2^2 - V_\infty^{-2}}{2V_2 V_\infty^-} \\ &= \frac{(10,52)^2 - (13,10)^2 - (9,15)^2}{2(13,10)(9,15)} \\ &= 0,603 \Rightarrow \beta = \pm 52,88^\circ \end{aligned}$$

As duas possibilidades para o sinal de β estão indicadas na Figura 9. Na verdade, essas opções estão relacionadas com a posição relativa entre \vec{V}_2 e \vec{V}_i . A situação denominada com uma linha (\vec{V}_∞^+ e \vec{V}_i') corresponde ao encontro ocorrido no ponto B mostrado na Figura 5. Para manter a decisão de efetuar os cálculos para o encontro ocorrendo no ponto A, vamos adotar o valor positivo para β .

(vi) Cálculo do ângulo de deflexão δ

Utilizando diretamente a equação (1):

$$\sin \delta = \frac{1}{1 + \frac{r_p V_\infty^2}{\mu_J}} = \frac{1}{1 + \frac{10^5 (9,15)^2}{1,39 \times 10^8}} = 0,943 \Rightarrow \delta = 70,59^\circ$$

Esse valor representa metade da rotação do vetor velocidade devido ao *swing-by* e isso faz com que ele esteja

limitado ao primeiro quadrante (a máxima rotação é de 180°). Torna-se, portanto, desnecessária a análise de quadrantes para esse valor. Ainda assim, essa rotação pode ser horária ou anti-horária. Essa análise será feita no passo seguinte.

(vii) Cálculo do ângulo de aproximação ψ

A Figura 10 ilustra as considerações a serem feitas na obtenção do ângulo ψ .

- (a) Primeiro, construímos o vetor velocidade de Júpiter, \vec{V}_2 , colocando esse vetor na vertical, como referência;
- (b) Depois, desenhamos o vetor \vec{V}_∞^- , do qual conhecemos a magnitude (9,15 km/s) e o ângulo formado com o vetor $\vec{V}_2(\beta)$;
- (c) Sabemos que o vetor \vec{V}_p fica situado exatamente entre os vetores \vec{V}_∞^- e \vec{V}_∞^+ e que o ângulo entre \vec{V}_∞^- e \vec{V}_∞^+ é de 2δ . Assim sendo, \vec{V}_p (a velocidade no perigeu) forma um ângulo δ com \vec{V}_∞^- .

A direção dessa rotação pode ser tanto horária quanto anti-horária, dependendo da geometria do encontro, conforme mostrado na Figura 11. É bom lembrar que Júpiter é tomado como uma massa puntiforme nessa fase da missão; isso faz com que qualquer das trajetórias A e B mostradas na Figura 11 sejam possíveis. A trajetória A causa uma rotação no sentido anti-horário do vetor velocidade, enquanto que a trajetória B causa uma rotação no sentido horário no vetor velocidade. Assim sendo, a Figura 11 mostra as duas possíveis posições do vetor \vec{V}_p , denominadas \vec{V}_{p1} e \vec{V}_{p2} .

O próximo passo consiste na obtenção do ângulo de aproximação ψ , que também é o ângulo formado entre

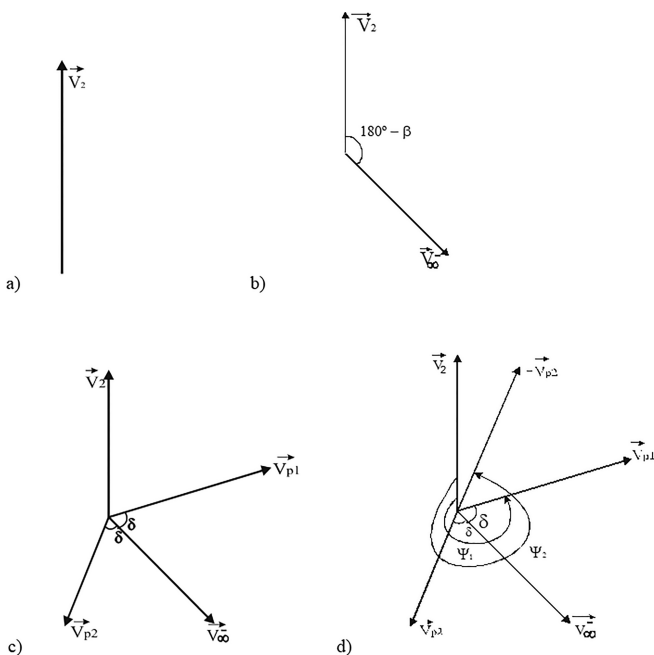


Figura 10: Velocidades \vec{V}_2 e \vec{V}_∞^- .

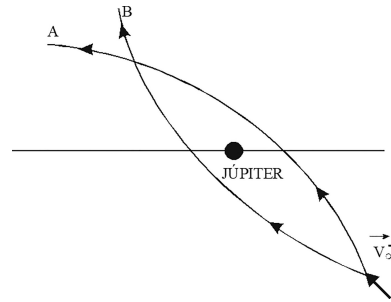


Figura 11: Possibilidades de direção de deflexão do vetor velocidade.

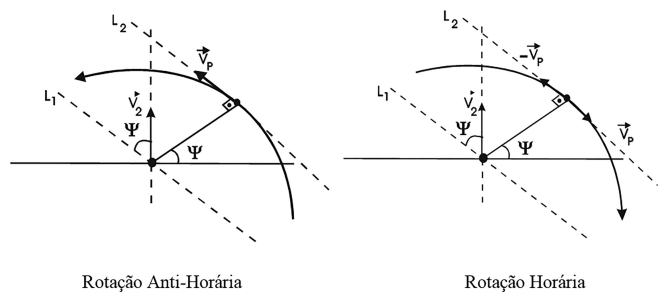


Figura 12: Obtenção do ângulo ψ .

os vetores \vec{V}_2 e \vec{V}_p no caso de uma rotação anti-horária e entre o vetor \vec{V}_2 e o vetor \vec{V}_p , no caso de uma rotação horária, ambos medidos no sentido anti-horário a partir de \vec{V}_2 . A Figura 12 explica essa diferença. Note que L_1 e L_2 são linhas paralelas e perpendiculares ao vetor \vec{r}_p . Sendo assim, os dois possíveis valores para o ângulo de aproximação são $\psi_1 = 303,47^\circ$ e $\psi_2 = 342,29^\circ$. Esses valores podem ser obtidos porque a velocidade \vec{V}_∞^- e os demais ângulos envolvidos são grandezas já conhecidas na presente etapa.

(viii) Obtenção das variações de energia, momento angular e velocidade

Com as grandezas obtidas acima, o cálculo dessas variações fica imediato, a partir das equações:

$$\Delta E = -2V_2V_\infty \sin \delta \sin \psi, \quad \Delta C = \frac{\Delta E}{\omega},$$

$$\Delta V = 2V_\infty \sin \delta \text{ onde}$$

$$\omega = 1,68 \times 10^{-8} \text{ rad/s é a velocidade angular do movimento dos primários.}$$

Aplicadas ao ângulo ψ_1 , temos:

$$\Delta E_1 = -2(13,10)(9,15)\sin(70,59^\circ)\sin(303,47^\circ) = 188,61 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\Delta C_1 = \frac{188,61}{1,68 \times 10^{-8}} = 11,22 \times 10^9 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\Delta V_1 = 2(9,15)\sin(70,59^\circ) = 17,26 \text{ km/s}$$

Aplicadas ao ângulo ψ_2 , temos:

$$\begin{aligned}\Delta E_2 &= -2(13, 10)(9, 15)\text{sen}(70, 59^\circ)\text{sen}(342, 29^\circ) \\ &= 68, 78 \text{ km}^2/\text{s}^2\end{aligned}$$

$$\Delta C_2 = \frac{68, 77}{1, 68 \times 10^{-8}} = 4, 09 \times 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$\Delta V_2 = 2(9, 15)\text{sen}(70, 59^\circ) = 17, 26 \text{ km/s}$$

(ix) Cálculo da energia, momento angular, semi-eixo maior e excentricidade após a manobra de *swing-by*

A partir dos valores iniciais e das variações calculadas no item anterior, pode-se obter facilmente os valores finais para a energia e o momento angular por simples adição:

$$E_{\text{depois}} = E_{\text{antes}} + \Delta E, \quad C_{\text{depois}} = C_{\text{antes}} + \Delta C$$

Para o semi-eixo maior e a excentricidade, pode-se utilizar as expressões

$$a = -\frac{\mu}{2E} \quad \text{e} \quad e = \sqrt{1 - \frac{C^2}{\mu a}}$$

Aplicando esses conceitos ao ângulo ψ_1 , temos:

$$E_{1\text{depois}} = -115, 65 + 188, 61 = 72, 96 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\begin{aligned}C_{1\text{depois}} &= 5, 89 \times 10^9 + 1, 122 \times 10^{10} \\ &= 1, 711 \times 10^{10} \text{ km}^2/\text{s}\end{aligned}$$

$$a_{1\text{depois}} = -\frac{1, 33 \times 10^{11}}{2(72, 96)} = -9, 11 \times 10^8 \text{ km}$$

$$\begin{aligned}e_{1\text{depois}} &= \sqrt{1 - \frac{(1, 711 \times 10^{10})^2}{(1, 33 \times 10^{11})(-9, 11 \times 10^8)}} \\ &= 1, 848\end{aligned}$$

Aplicando agora para o ângulo ψ_2 , temos:

$$E_{2\text{depois}} = -115, 65 + 68, 78 = -46, 87 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\begin{aligned}C_{2\text{depois}} &= 5, 89 \times 10^9 + 4, 09 \times 10^9 \\ &= 9, 98 \times 10^9 \text{ km}^2/\text{s}\end{aligned}$$

$$a_{2\text{depois}} = -\frac{1, 33 \times 10^{11}}{2(-46, 87)} = 1, 418 \times 10^9 \text{ km}$$

$$\begin{aligned}e_{2\text{depois}} &= \sqrt{1 - \frac{(9, 98 \times 10^9)^2}{(1, 33 \times 10^{11})(1, 418 \times 10^9)}} \\ &= 0, 687\end{aligned}$$

(x) Análise da órbita atingida

Com base nos valores calculados até o momento, é possível fazer uma análise da manobra de *swing-by*

realizada. Estudando os valores da energia, podemos observar que a energia inicial ($-115,65 \text{ km}^2/\text{s}^2$) é negativa, portanto a órbita é fechada (no caso, elíptica), com o veículo espacial permanecendo sempre a uma distância finita do corpo central. Já a energia final possui dois valores, dependendo de ψ . Para o caso $\psi_1 = 303,47^\circ$, a energia final é positiva ($72,96 \text{ km}^2/\text{s}^2$), o que indica uma órbita aberta (hiperbólica) cuja distância em relação ao corpo central tende ao infinito com o passar do tempo. Os valores negativos do semi-eixo maior ($9,11 \times 10^8 \text{ km}$) e maior do que a unidade para a excentricidade (1,848) estão de acordo com uma órbita hiperbólica.

Para o caso $\psi_2 = 342,29^\circ$, a energia final é negativa ($46,87 \text{ km}^2/\text{s}^2$), o que indica uma órbita também fechada (elíptica). Os valores positivos para o semi-eixo maior ($1,418 \times 10^9 \text{ km}$) e menor do que a unidade para a excentricidade (0,687) estão de acordo com uma órbita fechada. Esta análise indica que o *swing-by* gerou um escape do veículo espacial para o caso $\psi_1 = 303,47^\circ$.

Estudando agora o momento angular, notamos que todos os valores são positivos: $5,89 \times 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$ no início; $1,711 \times 10^{10} \text{ km}^2/\text{s}$ após a manobra para o caso $\psi_1 = 303,47^\circ$ e $9,98 \times 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$ após a manobra para o caso $\psi_2 = 342,29^\circ$. Isso indica que todas as órbitas envolvidas são diretas, ou seja, possuem rotação no sentido anti-horário.

5. Comentários finais

O presente artigo definiu e apresentou as bases matemáticas da manobra conhecida como *swing-by*. Ela consiste em colocar um veículo espacial para efetuar uma passagem próxima a um corpo celeste e alterar sua energia, velocidade e momento angular com base nessa passagem.

Como demonstrado matematicamente usando cálculo vetorial básico (apenas soma e subtração de vetores), a base física dessa mudança de órbita é o giro do vetor velocidade com relação ao corpo próximo. Isso faz com que o vetor velocidade do veículo espacial com relação ao corpo próximo seja alterado, embora sua magnitude seja mantida constante pela conservação da energia. Essa mudança altera significativamente a velocidade do veículo espacial com relação ao corpo principal do sistema, gerando grandes alterações de velocidade, energia e momento angular. Essas alterações podem ser positivas ou negativas, então fornecendo ou removendo energia do veículo espacial.

Entre as muitas aplicações possíveis, estão: o envio de uma sonda a Júpiter usando Vênus e/ou a Terra para fornecer energia ao veículo espacial; o envio de um veículo espacial a Mercúrio usando essa técnica para remover energia do mesmo para inserção em órbita do planeta, etc.

Em resumo, essa manobra abriu as portas do sistema solar exterior, pois o consumo de energia seria muito grande para efetuar essas viagens interplanetárias com uso de combustível.

Referências

- [1] C.E. Kohlhasse e P.A. Penzo, *Space Science Reviews* **21**, 77 (1977).
- [2] V.G. Szebehely, em: *AFCRL-NASA-VPI Conference on The Exploration of Mars and Venus* (Blacksburg, 1965).
- [3] W.M. Hollister e J.E. Prussing, *Astronautica Acta* **12**, 169 (1966).
- [4] S.A. Striepe e R.D. Braun, *The Journal of the Astronautical Sciences* **39**, 299 (1991).
- [5] R. Carvell, *Space* **1**, 18 (1985).
- [6] D.V. Byrnes e L.A. D'Amario, em: *AIAA/AAS Astrodynamics Conference* (San Diego, 1982).
- [7] L.A. D'Amario e D.V. Byrnes, em: *AIAA 21st Aerospace Sciences Meeting* (Reno, 1983).
- [8] S.S. Weinstein, em: *AIAA/AAS Astrodynamics Conference* (Hilton Head, 1992).
- [9] B.L. Swenson, em: *AIAA/AAS Astrodynamics Conference* (Hilton Head, 1992).
- [10] K.T. Nock e C.W. Uphoff, em: *Astrodynamics Specialist Conference* (Provincetown, 1979).
- [11] R.W. Farquhar e D.W. Dunham, *Journal of Guidance and Control* **4**, 192 (1981).
- [12] S.M. Marsh e K.C. Howell, *Double Lunar Swingby Trajectory Design*, disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.1988-4289>.
- [13] L.A. D'Amario, D.V. Byrnes, L.L. Sackett e R.H. Stanford, em: *AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference* (Provincetown, 1979).
- [14] L.A. D'Amario, D.V. Byrnes e R.H. Stanford, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **4**, 591 (1981).
- [15] L.A. D'Amario, D.V. Byrnes e R.H. Stanford, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **5**, 465 (1982).
- [16] A.F.B.A. Prado, *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **19**, 1142 (1996).
- [17] A.F.S. Ferreira, A.F.B.A. Prado e O.C. Winter, *Nonlinear Dynamics* **89**, 791 (2017).
- [18] J.O.M. Piñeros e A.F.B.A. Prado, *Journal of Spacecraft and Rockets* **1**, 1 (2020).
- [19] A.F.S. Ferreira, R.V. Moraes, A.F.B.A. Prado e O.C. Winter, *Nonlinear Dynamics* **102**, 1585 (2020).
- [20] R.B. Negri, A.A. Sukhanov e A.F.B.A. Prado, *Advances in Space Research* **64**, 42 (2019).
- [21] R.A. Broucke, em: *AIAA/AAS Astrodynamics Conference* (Minneapolis, 1988).
- [22] M.A. Minovich, *A Method for Determining Interplanetary Free-Fall Reconnaissance Trajectories*, disponível em: <http://www.gravityassist.com/IAF1/Ref.%201-73.pdf>.
- [23] R.B. Negri e A.F.B.A. Prado, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* **42**, 406 (2020).
- [24] G. Flandro, *Astronautical Acta* **12**, 329 (1966).
- [25] A.F.B.A. Prado, *Optimal Transfer and Swing-By Orbits in the Two- and Three-Body Problems*. Tese de Doutorado, University of Texas at Austin, Austin (1993).