

Estimando a aceleração da expansão do Universo com o SimECosmo

Constraining the acceleration of the expanding Universe with SimECosmo

Iuri Baranov Pereira Raymundo^{*1}, Luan Orion de Oliveira Baraúna Ferreira²,
Matheus Monteiro Wolney Mello¹, Cássio Pigozzo³

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, Salvador, BA, Brasil.

²Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, SP, Brasil.

³Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, Brasil.

Recebido em 19 de maio de 2022. Aceito em 26 de junho de 2022.

Apresentamos uma revisão de como as Supernovas do Tipo Ia (SN Ia) são utilizadas em Cosmologia para estimar parâmetros dos modelos cosmológicos. Em específico, discutimos como elas ajudaram na mudança de paradigma observada na virada do século passado para este: o Universo está em expansão acelerada. Para isso, discutiremos como delimitar parâmetros cosmológicos, em especial o parâmetro de desaceleração, com a definição de um tipo de distância em cosmologia, que é calculada conhecendo a luminosidade de objetos astrofísicos. Desenvolvemos um software para ser utilizado em conjunto com este artigo por professores em suas aulas ou orientações, bem como por estudantes em seus estudos individuais. O SimECosmo, acrônimo para **S**imulador para o **E**nsino de **C**osmologia, possui interface com usuário e permite a visualização de como os parâmetros cosmológicos afetam as previsões dos modelos, comparando com dados de SN Ia das compilações Union 2.1 e Pantheon Sample.

Palavras-chave: Cosmologia, Expansão Acelerada, Supernovas, Simulação.

We present a review of how Type Ia Supernovae (SN Ia) are used in cosmology to estimate cosmological models parameters. In particular, we discuss how they helped with the paradigm shift observed at the turn of the last century to this one: the Universe is in an accelerated expansion rate. For this, we will discuss how to delimit cosmological parameters, especially the deceleration parameter, with the definition of a type of distance in cosmology, which is calculated knowing the luminosity of astrophysical objects. We developed a software to be used with this article by teachers in their classes or orientations, as well as by students in their individual studies. The SimECosmo, acronym for **S**imulador para o **E**nsino de **C**osmologia, has a user interface and allows the visualization of how cosmological parameters affect model predictions, comparing with SN Ia data from the Union 2.1 and Pantheon Sample compilations.

Keywords: Cosmology, Accelerated Expansion, Supernovae, Simulation.

1. Introdução

A Cosmologia moderna padrão, que encontra na Teoria da Relatividade Geral (TRG) sua sustentação teórica, tem origem em 1917, quando Einstein aplicou sua recém criada teoria e obteve uma solução estática para o Universo [1, p. 175–188], [2–4]. Contudo, a ideia de um Universo estático não duraria muito. Já na década seguinte, algumas soluções expansionistas foram obtidas por Friedmann e Lemaître¹ [6, 9–11]. Em 1929, Hubble obtém a lei que leva seu nome, relacionando a velocidade de afastamento das galáxias com sua distância ao Sol [12]. Essa relação é obtida ao se associar o *redshift* (desvio para o vermelho) observado das linhas

espectrais com a velocidade de recessão ($V \approx zc$, válida apenas para baixos *redshift*). Após esses resultados, a interpretação de um Universo em expansão ganhou força na recente comunidade de cosmólogos, apesar de Hubble nunca ter defendido essa ideia publicamente. Um interessante debate sobre a história e como se obtém a chamada Lei de Hubble pode ser encontrada em [8, 13, 14].

Com a mudança do paradigma, novos modelos surgem para tentar explicar um Universo dinâmico. A interpretação do *redshift* cosmológico levou a uma controvérsia que perdurou por 20 anos. Dois principais modelos cosmológicos disputavam o posto de melhor explicação: o modelo de Estado Estacionário, proposto por Herman Bondi, Tommy Gold e, independentemente, Fred Hoyle [15, 16], que supõe que a matéria fosse criada a uma taxa constante durante a evolução do Universo, deixando a densidade de matéria constante apesar da expansão, e o *Big Bang* quente, cujo o grande nome é de George Gamow [17], que propõe que o Universo era

* Endereço de correspondência: iuribaranov@ifba.edu.br

¹ Lemaître inclusive obteve uma estimativa para a taxa de expansão em 1927 usando dados obtidos por Hubble em um trabalho publicado em francês [5], com recente tradução integral [6]. O próprio Lemaître traduziu seu artigo para o inglês em 1931, mas deixou de fora partes substanciais do texto original [7, 8].

mais quente e denso no passado. Esse debate começou a ser resolvido quando observações passaram a favorecer o modelo do *Big Bang* quente. Um rico relato sobre a história, desenvolvimento das teorias, seus fundadores e observações da época pode ser encontrado em [18, p. 19–47].

O cenário cósmico é composto por estes ingredientes: um espaço-tempo dinâmico permeado e influenciado por um substrato composto por matéria e radiação. Estrelas, galáxias e estruturas cada vez mais complexas são resultado da evolução desse substrato com o tempo. Como veremos adiante, modelos desse tipo apresentam sempre uma expansão desacelerada. Do ponto de vista newtoniano, isso faz muito sentido, uma vez que a força gravitacional é sempre atrativa e a constante cosmológica, que tinha um papel de força repulsiva, já havia sido descartada. Contudo, alguns problemas ainda apareceriam. A idade do Universo, calculada com os valores da constante de Hubble da época, era sempre menor do que a de alguns objetos presentes no cosmos como, por exemplo, a própria Terra. Uma possível maneira de contornar esse problema seria reintroduzir a constante cosmológica a fim de aumentar a idade do Universo. Além disso, já em 1975 algumas observações de dados do diagrama de Hubble, em conjunto com vínculos sobre a densidade do Universo e idade de galáxias, indicavam uma expansão acelerada [19].

Se na década de 1920 o paradigma de Universo estático começava a transicionar para um Universo dinâmico, ou seja, em expansão, no final do século passado outra mudança de paradigma foi iniciada. Em 1990, Efsthathiou et al. publicaram um trabalho que sugeria um Universo plano com 80% do conteúdo energético sendo responsável por uma constante cosmológica positiva [20]. No final da década de 1990, dois grupos, Supernova Cosmology Project e High-z Supernova Search Team, utilizando observações de Supernovas do Tipo Ia (SN Ia), mostraram evidências mais contundentes para uma expansão acelerada [21, 22]. Por essas descobertas Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess foram agraciados com o Prêmio Nobel de 2011.

Neste trabalho, fazemos uma análise de como podemos utilizar as SN Ia para determinar se o Universo está em expansão acelerada ou não. Para isso, estruturamos este artigo da seguinte maneira. Na Seção 2 introduziremos as equações básicas da cosmologia que serão utilizadas ao longo do trabalho. É nessa seção que apresentamos o modelo que melhor ajusta os dados, chamado Λ CDM, bem como discutiremos quais são os parâmetros que o descrevem. Como veremos na Seção 3, definir distâncias em cosmologia não é tão simples e, em geral, depende do modelo cosmológico utilizado. Por isso, podemos determinar parâmetros cosmológicos a partir da observação de distâncias. Já na Seção 4, descrevemos o que são as Supernovas do Tipo Ia e qual o mecanismo físico por trás da detonação dessas estrelas. A técnica estatística que será utilizada para obter os parâmetros que melhor

ajustam os dados de SN Ia é descrita na Seção 5. Na Seção 6, mostramos os resultados obtidos a partir da análise de dados de SN Ia dos catálogos Union 2.1 [23] e Pantheon Sample [24]. Por fim, no Anexo A encontram-se as deduções necessárias para compreensão da discussão de distância de luminosidade e no Anexo B apresentaremos o SimECosmo, acrônimo para **Simulador** para o **Ensino de Cosmologia**, um software de interação com usuário que auxilia na compreensão de como os valores dos parâmetros cosmológicos alteram as previsões dos observáveis físicos, que pode ser usado como ferramenta didática para professores ou ser utilizada diretamente por estudantes.

2. Equações Básicas do Modelo Λ CDM

Esta seção tem como objetivo reunir as principais equações do modelo Λ CDM, a fim de estabelecer a notação e servir de guia para as próximas seções. Não deduziremos todas elas, mas indicamos algumas referências para o leitor interessado em obter as demonstrações [25, p. 43], [26, p. 234], [27–30, p. 225].

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) descreve um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão e pode ser escrita como

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1)$$

em que $g_{\mu\nu}$ são as componentes da métrica, $a(t)$ é o fator de escala - uma função apenas do tempo que codifica como as distâncias evoluem com o tempo em um Universo dinâmico - e $\kappa = 0, \pm 1$ é a constante de curvatura.

Se a métrica tem o papel de fornecer o pano de fundo no qual os eventos acontecem, cabe ao tensor energia-momento descrever a distribuição e fluxo de energia e momento associados ao conteúdo material/energético que permeia o espaço-tempo. Em Cosmologia, é usual utilizar o tensor energia-momento de um fluido perfeito para modelar o substrato material em largas escalas,

$$T_{\mu\nu} = (\rho_T + p_T) \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} - p_T g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

em que $\rho_T = \sum_i \rho_i$ e $p_T = \sum_i p_i$ são a densidade de energia e a pressão totais do fluido e u^μ é a quadrivelocidade do fluido (para um observador comóvel, $u^\mu = (c, \mathbf{0})$). Chamamos a atenção do leitor para o fato de que algumas referências utilizam a letra ρ para a densidade de massa da matéria e ε para densidade de energia. Essas quantidades estão relacionadas pela famosa expressão $E = mc^2$, ou seja, $\varepsilon = \rho c^2$. Além disso, é comum encontrarmos textos que utilizam a convenção $c = 1$, que pode levar a alguma confusão na hora de se comparar as unidades de medida de cada grandeza.

As equações de campo de Einstein são as responsáveis por conectar o conteúdo material e energético com a geometria do espaço-tempo. Historicamente, essas equações sofreram alterações em sua forma. Para dar conta de uma solução para um Universo estático, Einstein introduziu a chamada constante cosmológica, que foi abandonada anos mais tarde após as evidências da expansão do Universo. Como veremos adiante, dados de Supernovas do tipo Ia sugerem que essa constante seja não nula e, por essa razão, escreveremos as equações de campo com o termo cosmológico,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{3}$$

em que G é a constante gravitacional de Newton, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura de Ricci e Λ é a constante cosmológica, que tem dimensão de (comprimento)⁻². Tanto $R_{\mu\nu}$, quanto R , carregam as informações da geometria do espaço-tempo, já que são calculados a partir do tensor métrico e suas derivadas.

Inserindo as equações (1) e (2) nas equações de campo de Einstein (3), obtemos as equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_T - \frac{\kappa c^2}{a^2}, \tag{4}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + \kappa c^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p_T + \Lambda c^2, \tag{5}$$

em que definimos o parâmetro de Hubble, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, uma função do tempo que mede a taxa de expansão do Universo. O valor dessa função hoje, H_0 , é chamado de constante de Hubble. Também introduzimos a densidade de energia relacionada à constante cosmológica, $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$, incorporando essa componente ao somatório da densidade de energia total ρ_T .

Pela expressão (4), vemos que se o Universo não possui curvatura espacial ($\kappa = 0$), a densidade assume o valor, definido como “densidade crítica”, $\rho_c \equiv \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}$. O significado dessa definição é simples: caso a densidade de energia total que medimos no Universo seja igual à densidade crítica, temos, portanto, um Universo espacialmente plano. A razão entre a densidade de energia de uma determinada componente do Universo pela densidade crítica é chamada de parâmetro de densidade, $\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}$, e mede a contribuição energética relativa daquela componente. Portanto, utilizando as definições acima, a primeira equação de Friedmann fica

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{\kappa 0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda 0} \right], \tag{6}$$

em que Ω_{r0} , Ω_{m0} e $\Omega_{\Lambda 0}$ são, respectivamente, os parâmetros de densidade da radiação, matéria e constante cosmológica hoje e $\Omega_{\kappa 0} \equiv -\frac{\kappa c^2}{(a_0 H_0)^2}$ é o parâmetro de densidade associado à curvatura. Um vínculo entre esses

parâmetros, que será muito utilizado nas equações e seções subsequentes, pode ser obtido ao substituirmos os valores de hoje ($H = H_0$ e $a = a_0$) na expressão acima,

$$1 = \Omega_{\kappa 0} + \sum_i \Omega_{i0}. \tag{7}$$

O modelo Λ CDM é composto por matéria (bariônica + escura fria) sem pressão, a presença da constante cosmológica e, possivelmente, curvatura. A radiação, embora importante para evolução do Universo jovem (até alguns milhares de anos após o *Big Bang*), possui uma densidade muito baixa hoje e pode ser desprezada quando tratamos de dados em baixos *redshifts*. Com isso, podemos escrever o parâmetro de densidade da curvatura como $\Omega_{\kappa 0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0}$. Utilizando ainda a relação entre o fator de escala e o *redshift*, $(1 + z = \frac{a_0}{a})^2$, escrevemos a equação de Friedmann na forma final para as próximas seções,

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{m0})(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]. \tag{8}$$

As duas equações de Friedmann (4) e (5) podem ser manipuladas para fornecerem uma equação para a aceleração da expansão,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3c^2}(\rho_T + 3p_T). \tag{9}$$

Percebemos a importância da presença de Λ para a dinâmica cosmológica com a equação acima. A depender do valor dessa quantidade, podemos ter um Universo em expansão acelerada ou desacelerada. Importante notar que, para um Universo composto por matéria, ρ_T e p_T são sempre grandezas positivas. Portanto, sem a presença da constante cosmológica, a expansão é sempre desacelerada ($\ddot{a} < 0$).

A partir da equação de aceleração (9) podemos definir o parâmetro de desaceleração

$$q(z) \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_{m0}(1+z)^3 - 2\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0}} + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0})(1+z)^2 \right], \tag{10}$$

que hoje possui o valor $q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0}$. Caso $\Omega_{\Lambda 0}$ seja (menor) maior que $\frac{1}{2}\Omega_{m0}$, temos uma expansão (desacelerada) acelerada. Para um Universo plano apenas com matéria, o parâmetro de desaceleração é $q_0 = \frac{1}{2}$, que mostra um Universo em expansão desacelerada (e justifica, historicamente, o sinal na definição do parâmetro).

² Para maiores detalhes, ver [25].

Tabela 1: Idade do Universo.

Modelo	Idade (bilhões de anos)
Einstein-de Sitter	9.3
Λ CDM plano	13.5

Utilizando a definição do parâmetro de Hubble, obtemos a idade para o Universo hoje:

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{da}{aH(a)}. \tag{11}$$

Quando substituímos a equação (6) com $\Omega_{r0} = \Omega_{\kappa 0} = 0$ na expressão acima, obtemos a idade para o modelo Λ CDM plano:

$$t_0 = \frac{2H_0^{-1}}{3\sqrt{1 - \Omega_{m0}}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - \Omega_{m0}} + 1}{\sqrt{\Omega_{m0}}} \right]. \tag{12}$$

No caso em que $\Omega_{m0} \rightarrow 1$, ou seja, no caso de um modelo Einstein-de Sitter, a idade é dada por

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}. \tag{13}$$

Na Tabela 1 calculamos a idade para esses dois modelos com $H_0 = 70$ km/s/Mpc e $\Omega_{m0} = 0.3$ no caso do Λ CDM. Estimativas recentes mostram que a idade de aglomerados globulares implicam em uma idade para o Universo de, aproximadamente, 13.5 bilhões de anos [31], indicando uma forte incompatibilidade para o modelo apenas com matéria. Como discutido na seção anterior e observado nos resultados abaixo, a presença da constante cosmológica aumenta a idade do Universo.

3. Distâncias em Cosmologia

Ao medirmos distâncias astronômicas relativamente pequenas, os efeitos de curvatura da geometria do espaço-tempo e da expansão cósmica podem ser desconsiderados. Essas medições são importantes para cosmologia, pois com elas conseguimos obter o valor da taxa de expansão do universo no tempo presente (H_0). Além disso, podemos coletar informações sobre objetos astronômicos conhecidos como “velas padrão”, que são objetos de luminosidade intrínseca (energia luminosa) conhecida. Com essas medidas de distância, podemos calibrar os parâmetros que descrevem fisicamente essa classe de objetos.

O método mais importante para determinar distâncias em cosmologia é baseado na medição da luminosidade de objetos. A luminosidade L é a energia emitida por unidade de tempo e a luminosidade aparente f é a energia recebida por unidade de área por unidade de tempo. Se a energia é emitida isotropicamente (com mesma intensidade em todas as direções), então podemos encontrar a relação entre essas grandezas na geometria euclidiana. Supondo o objeto no centro de

uma esfera cujo raio é igual à distância d entre o objeto e a Terra, podemos escrever

$$f = \frac{L}{A} = \frac{L}{4\pi d^2}. \tag{14}$$

Se conhecermos a luminosidade de alguma classe de objetos astronômicos, eles atuariam como excelentes velas-padrão. Da mesma maneira que podemos determinar a distância até uma lâmpada acesa se soubermos sua luminosidade, uma vez que conhecemos a luminosidade de um objeto astrofísico e medimos o fluxo em nosso telescópio, podemos calcular uma grandeza conhecida como distância de luminosidade

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \tag{15}$$

No século II d.C. um astrônomo de Alexandria chamado Claudius Ptolomeu publicou uma lista com 1022 estrelas, classificadas em categorias de brilho aparente, em que as estrelas mais brilhantes foram consideradas como de primeira magnitude e as dificilmente visíveis a olho nu de sexta magnitude. Em meados do século 19, o astrônomo inglês Norman Pogson estabeleceu a escala de magnitudes que usamos atualmente [32, p. 162]. Nessa escala, as diferenças de magnitudes entre duas estrelas estão associadas à razão entre os fluxos de cada uma pela relação:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right), \tag{16}$$

em que m_i e f_i são, respectivamente, a magnitude aparente e o fluxo medido da estrela i , com $(i = 1, 2)$. A equação da magnitude aparente (16) é definida de tal maneira que as estrelas mais brilhantes visíveis a olho nu (que têm magnitude 1) são 100 vezes mais brilhantes do que as estrelas mais fracas (que têm magnitude 6). O leitor pode conferir que, quando $m_1 = 1$ e $m_2 = 6$, temos $f_1 = 100 f_2$.

A magnitude, assim definida e representada pela letra m , é chamada magnitude aparente, pois ela é associada ao brilho que enxergamos e não ao “brilho intrínseco” da estrela, que é sua luminosidade. Como uma forma de comparar o brilho intrínseco entre dois objetos, os astrônomos introduziram o conceito de magnitude absoluta, representada pela letra M , definida como a magnitude aparente que uma estrela teria se estivesse à distância de 10 parsecs de nós. Com essa definição na expressão acima, temos

$$m - M = -2.5 \log \left(\frac{f}{f_{10}} \right), \tag{17}$$

em que f_{10} é o fluxo medido à 10 parsecs de distância da estrela em estudo. Os fluxos acima podem ser substituídos, utilizando a equação (15), pela luminosidade e distância: $f = \frac{L}{4\pi(d_L)^2}$ e $f_{10} = \frac{L}{4\pi 10^2}$. Com isso, definimos o módulo de distância μ como

$$\mu = m - M = 5 \log \left(\frac{d_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25. \tag{18}$$

Para mais detalhes sobre a equação acima, ver Anexo A.1. A partir da equação (18) podemos obter a distância luminosidade, em Megaparsecs, sabendo o módulo de distância:

$$d_L = 10^{\frac{\mu - 25}{5}}. \tag{19}$$

A maneira pela qual definimos distância em Cosmologia nesta seção não é a única. Para outras formas, bem como métodos de medida, consultar [33, p. 13–31].

3.1. Distância de luminosidade em um universo em expansão

A definição de distância de luminosidade (15) não considera como o fluxo de fótons é afetado pela expansão. Para levar isso em conta, consideramos um observador na origem do nosso sistema de coordenadas esféricas e um objeto luminoso distante com coordenadas (r, θ, ϕ) . Os fótons emitidos no tempo t_e estarão espalhados no tempo da observação t_0 sobre a área de uma esfera de raio dado por³ r_k , portanto a área de sua superfície é

$$A_p(t_0) = 4\pi a_0^2 r_k(t_0)^2. \tag{20}$$

Note que, em um universo positivamente curvado, a área da esfera seria menor que $4\pi r^2$, que é o equivalente num universo plano, porém, em um universo negativamente curvado a área calculada seria maior que este valor. Ou seja, a curvatura do universo atua no fluxo observado de um objeto luminoso. Para universos positivamente curvados os fótons são espalhados por uma área menor e conseqüentemente medimos um fluxo maior; já para um universo negativamente curvado, a área de espalhamento seria maior e o fluxo medido menor do que o calculado num universo plano.

Além dos efeitos geométricos, que são existentes mesmo em universos estáticos, a expansão do universo causa um decréscimo do fluxo observado por um fator de $(1+z)^{-2}$. O primeiro fator vem do fato de que, devido à expansão do Universo, a energia do fóton observada, E_0 , é menor que a energia que ele tinha ao ser emitida, E_e , dada por

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}. \tag{21}$$

Além disso, o intervalo de tempo que os fótons chegam é aumentado por um fator $\delta t_0 = \delta t_e(1+z)$. Para maiores detalhes de como se obtém esses fatores ver [34, p. 161–162].

Como o fluxo observado é a quantidade de energia por unidade de tempo e por unidade de área, podemos mostrar que

$$f = \frac{E_0}{\delta t_0 A_p(t_0)} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r_k(t_0)^2 (1+z)^2}, \tag{22}$$

³ Para maiores detalhes do significado desta coordenada e deduções desta seção consultar Apêndice A.

em que $L = \frac{E_e}{\delta t_e}$ é a luminosidade do objeto. Comparando a expressão anterior com a equação (15), vemos que

$$d_L(z) = a_0 r_k(z)(1+z). \tag{23}$$

Como mostrando no Anexo A.3, a distância de luminosidade é dada por [35, p. 42.]

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_\kappa}} (1+z) \operatorname{senh} \left[H_0 \sqrt{\Omega_\kappa} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right]. \tag{24}$$

Considerando $c \approx 3 \times 10^5$ km/s, o módulo de distância definido em (18) é escrito em função da distância luminosidade como:

$$\mu = 5 \log \left(\frac{H_0 d_L}{c} \right) - 5 \log(H_0) + 32.384. \tag{25}$$

As equações (24) e (25) nos permitem relacionar os parâmetros cosmológicos de determinado modelo, embutidos no parâmetro de Hubble $H(z)$, com o módulo de distância. Se soubermos a luminosidade de uma classe de objetos, podemos medir o fluxo, determinar μ e obter os parâmetros que melhor se ajustam às observações. Na próxima seção discutiremos como o entendimento da física de Supernovas pode nos auxiliar na difícil tarefa de se obter a luminosidade intrínseca de uma classe de objetos. Na Figura 1 podemos analisar como a distância de luminosidade é afetada ao variarmos o parâmetro de densidade da matéria. Como podemos ver, o módulo de distância aumenta quanto maior for a contribuição da constante cosmológica. Como a magnitude absoluta não muda, isso mostra que a magnitude aparente medida é maior em um universo com Λ em relação a um universo apenas com matéria. Em outras palavras, objetos parecem menos brilhantes (quanto maior a magnitude aparente, menor o brilho) em um universo com presença apreciável de Λ .

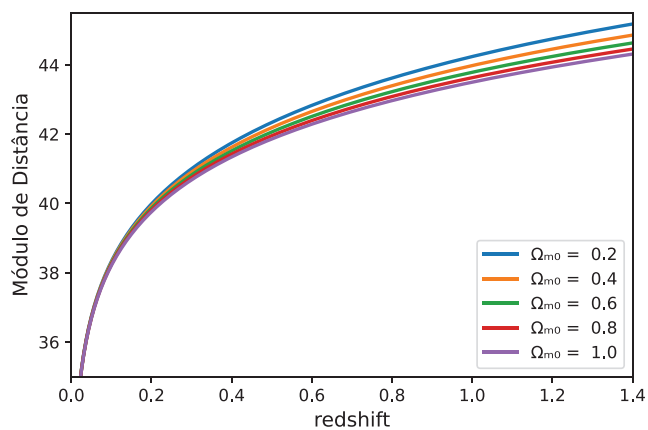


Figura 1: Evolução do módulo de distância em função do *redshift* descrito pela equação (24) para diferentes valores de Ω_{m0} . Adotamos como modelo um universo espacialmente plano composto por matéria e constante cosmológica.

4. Supernovas do Tipo Ia

Algumas estrelas, isoladas ou em sistemas binários, passam por um aumento repentino de muitas ordens de grandeza em sua luminosidade em um curto período de tempo, apresentando um declínio gradual após o pico. Novas e Supernovas são exemplos desses fenômenos. As Supernovas são classificadas em dois tipos, a depender do seu espectro: as do Tipo I não apresentam linhas de hidrogênio; já as do Tipo II, apresentam [36], [37, p. 205], [38, p. 121].

Dentro da categoria das do Tipo I, há ainda uma subdivisão: Ia, Ib e Ic. As Supernovas do Tipo Ia (SN Ia) são um dos possíveis estágios finais da evolução estelar e ocorrem em sistemas binários compostos por uma anã branca que acreta material de uma estrela companheira. A anã branca aumenta sua massa gradativamente e atinge o chamado limite de *Chandrasekhar*.

Devido às condições extremas no interior de uma anã branca, a pressão de degenerescência envolvendo os elétrons é muitas ordens de grandeza superior à pressão dos núcleos de carbono e oxigênio. Essa pressão de degenerescência ocorre porque os elétrons, que são férmions, obedecem ao princípio de exclusão de Pauli: apenas um férmion pode ocupar cada estado quântico. Dessa maneira, por mais que os elétrons sejam compactados pela força gravitacional, a pressão de degenerescência impede o colapso da estrela. Contudo, as características físicas dessa pressão são bem diferentes daquelas que estamos acostumados pela lei dos gases ideais. Por exemplo, a pressão de degenerescência não depende da temperatura, como no caso dos gases ideais. Essas diferenças levam a resultados importantes, sendo o principal deles o de que a massa que uma anã branca pode ter apresenta um limite, dado pela massa de Chandrasekhar $M_{Ch} \approx 1.4 M_{\odot}$, em que $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$ kg é a massa do Sol [39, p. 74–84].

Quando a massa de uma anã branca atinge o limite de Chandrasekhar, a pressão de degenerescência não consegue mais suportar a pressão gravitacional. Nesse momento a estrela colapsa e a temperatura interna atinge um valor em que é possível a fusão do carbono em toda a estrela, dando início a uma detonação, que ocorre simultaneamente e a estrela explode.

A compreensão das SN Ia é importante porque elas figuram todas em sistemas muito parecidos, tendo sempre como elemento comum uma anã branca que atinge o limite de Chandrasekhar ao consumir o material de uma estrela companheira. Apesar de não serem exatamente iguais, apresentando uma variação de brilho de até três ordens de magnitude [40, p. 151–176], é possível obter uma correlação entre a forma da curva de luz das SN Ia e a luminosidade. Dessa maneira conseguimos tratar as SN Ia como velas-padrão⁴ e, como vimos na seção anterior, podemos utilizá-las para determinar distâncias

⁴ Como vemos, um termo mais adequado, também encontrado na literatura, seria velas padronizáveis.

em Cosmologia e estimar o valor de parâmetros cosmológicos. Uma apresentação dos métodos de calibração das curvas de luz, bem como um levantamento de catálogos de SN, pode ser encontrada em [41].

5. Estimando o Valor dos Parâmetros

Como discutido anteriormente, os modelos cosmológicos são caracterizados por um conjunto de parâmetros $\theta = \{\theta_i\}$ e, a depender do valor que cada parâmetro assuma, resultam em um universo com história, evolução e idade específicas. O confronto dos modelos com os dados observacionais é essencial para determinarmos o modelo que melhor descreve o universo em que vivemos, com base nas informações obtidas a partir das observações. Assim, métodos estatísticos são aplicados na determinação do valor dos parâmetros cosmológicos, e no nível de confiança estatística que temos sobre essas medidas.

A função densidade de probabilidade dos parâmetros θ do modelo, dados o modelo cosmológico H e os dados D , também conhecida como densidade de probabilidade a posteriori, pode ser escrita, a partir do teorema de Bayes, como

$$\mathcal{P}(\theta|D, H) = \frac{\mathcal{P}(\theta|H)\mathcal{P}(D|\theta, H)}{\mathcal{P}(D|H)}, \quad (26)$$

onde $\mathcal{P}(\theta|H)$ carrega as informações que temos a priori do modelo e dos valores de seus parâmetros⁵ e $\mathcal{P}(D|\theta, H) \equiv \mathcal{L}(\theta)$ é a verossimilhança ou *likelihood*, ou seja, a densidade de probabilidade de um conjunto de dados, assumidos o modelo e valores para seus parâmetros. O denominador $\mathcal{P}(D|H)$, conhecido como fator de Bayes, entra como uma constante de normalização da densidade de probabilidade posterior, podendo ser calculada como

$$\mathcal{P}(D|H) \equiv \int \mathcal{P}(\theta|H)\mathcal{P}(D|\theta, H). \quad (27)$$

Mais detalhes sobre a estatística Bayesiana podem ser encontrados em [42–46].

5.1. Teste de χ^2

Qualquer medida realizada em um laboratório ou observação realizada por um telescópio ou satélite está sujeita à precisão daquele determinado instrumento. Desta forma, toda medida física gerará um dado ou informação D_i e, conseqüentemente, um erro associado, σ_i . Entretanto, a obtenção de uma determinada informação pode influenciar diretamente uma outra medida a ser realizada, bem como seu erro associado. Experimentos e observações com essa propriedade possuem o que chamamos de erros correlacionados. Assim, os erros das medidas D_i são relacionados com os erros das medidas

⁵ Em inglês, essa função é chamada de *prior*, e pode ser proposta por argumentos físicos ou com base em resultados prévios.

D_j através do termo σ_{ij} , dentro da chamada *Matriz de Covariância* C_{ij} , dada por

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1j} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \dots & \sigma_{ij} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Uma forma de pré-determinar uma medida, é utilizando uma previsão teórica $y(H_i|\theta)$. Esta previsão depende de um determinado modelo H_i e de parâmetros θ associados ao modelo desenvolvido. Desta forma, um bom modelo teórico, consegue na i -sima previsão encontrar, com uma certa precisão um valor próximo da medida D_i . Uma das ferramentas estatísticas para confrontar premissas teóricas com dados observacionais é o chamado *Teste de χ^2* , aqui representado por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[D_i - y(H_i|\theta)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (29)$$

No contexto cosmológico, para um conjunto de dados não correlacionados, como é o caso das medidas da magnitude aparente das SN Ia realizadas pelo pacote de dados Union 2.1, escreveremos o χ^2 como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[\mu_i^{\text{obs}} - \mu_i^{\text{teo}}]^2}{\sigma_i^2}. \quad (30)$$

Já para medidas que possuem erros correlacionados, como é o caso das medidas do pacote de dados Pantheon Sample, escrevemos o teste de χ^2 através do inverso da matriz de covariância, ou seja, a matriz de Fisher, representada por C_{ij}^{-1} [47] como

$$\chi^2 = \sum_{ij} [\mu_i^{\text{obs}} - \mu_i^{\text{teo}}] (C_{ij}^{-1}) [\mu_j^{\text{obs}} - \mu_j^{\text{teo}}]. \quad (31)$$

Nas duas equações μ_i^{obs} e μ_i^{teo} representam, respectivamente, o módulo de distância medido para a i -ésima supernova de cada pacote e o módulo de distância calculado para a mesma i -ésima supernovas através da equação (25), considerando seus respectivos *redshifts* e os erros das medidas σ_i .

Logo, uma vez que as hipóteses teóricas são construídas através de parâmetros dentro de um determinado modelo, o conjunto de parâmetros que minimiza o valor de χ^2 é o conjunto de parâmetros que, para o modelo em estudo, melhor se ajusta às observações [48]. Assim, definimos a verossimilhança, ou seja, a probabilidade dos dados frente a um determinado modelo testado, como

$$\mathcal{P}(D|\theta, H) \equiv C \exp \left[-\frac{\chi^2(\theta)}{2} \right], \quad (32)$$

onde C é uma constante de normalização tal que $\int \mathcal{P}(D|\theta) d\theta = 1$, quando integrada sobre todo o espaço dos parâmetros θ [51].

Quando adotamos *priors* não informativos, a densidade de probabilidade posterior é proporcional à verossimilhança. Assim, a minimização de χ^2 equivale à maximização de $\mathcal{L}(\theta)$, que, por sua vez, resultaria no conjunto de valores dos parâmetros para a máxima densidade de probabilidade a posteriori. Assim, em cosmologia o conjunto de parâmetros que maximizam a verossimilhança é o conjunto de parâmetros que, para um dada precisão, descrevem as propriedades do Universo.⁶

Na Figura 2, apresentamos um exemplo de distribuição de densidade de probabilidade para o parâmetro de Hubble, que chamaremos $\mathcal{P}(H_0)$. Se integrarmos essa função entre dois valores $H_{0,1}$ e $H_{0,2}$,

$$P_{[H_{0,1}; H_{0,2}]} = \int_{H_{0,1}}^{H_{0,2}} \mathcal{P}(H_0) dH_0, \quad (33)$$

obteremos a probabilidade acumulada entre os valores $H_{0,1}$ e $H_{0,2}$. Define-se uma região de confiança como o intervalo que acumula uma determinada probabilidade. Por exemplo, a região de 1σ de confiança apresenta uma probabilidade acumulada de 68.4% do valor real daquele parâmetro estar dentro daquele intervalo. Há alguns métodos para calcular a região de 1σ que convergem no caso de distribuição simétrica. Um deles é, a partir da máxima densidade de probabilidade, fazer cortes horizontais na distribuição e calcular a integral entre os pontos de intersecção desses cortes com a curva, até que se obtenha um valor de 0.684; os valores de H_0 associados aos limites de integração dessa condição definiriam o intervalo de 1σ para esse parâmetro, segundo os dados utilizados. Outro método, mais eficiente de ser implementado, é integrar do valor mais baixo até um certo valor H_{0i} que acumule $(1 - 0.684)/2$ de probabilidade. Assim, H_{0i} seria o limite inferior da região de 1σ . Descobrimo a partir de qual valor H_{0f} temos que realizar a integral até o valor mais alto de H_0 para que se acumule $(1 - 0.684)/2$, equivaleria a determinar o limite superior da região de 68.4% de probabilidade. As regiões integradas, neste segundo método, estão representadas na Figura 2.

5.2. Resultados

Neste trabalho, apresentando uma primeira versão do *SimECosmo*, utilizamos a tabela do módulo de distância vs. *redshift*, disponível no site do Supernova Cosmology Project, que contém os nomes das supernovas, seu *redshift* e o módulo de distância com o erro associado do pacote Union 2.1. Utilizamos também o Pantheon Sample, pacote que contém 1048 supernovas com erros correlacionados e, por isso, utilizamos a equação (31) para a determinação do χ^2 . Neste pacote a medida do

⁶ A estatística Bayesiana nos permite incluir resultados prévios, de outros estudos, possivelmente com outros observáveis, na função do *prior* $\mathcal{P}(\theta|H)$ (26). Neste caso, o melhor ajuste será dado pela maximização da função densidade de probabilidade a posteriori, $\mathcal{P}(\theta|D, H)$.

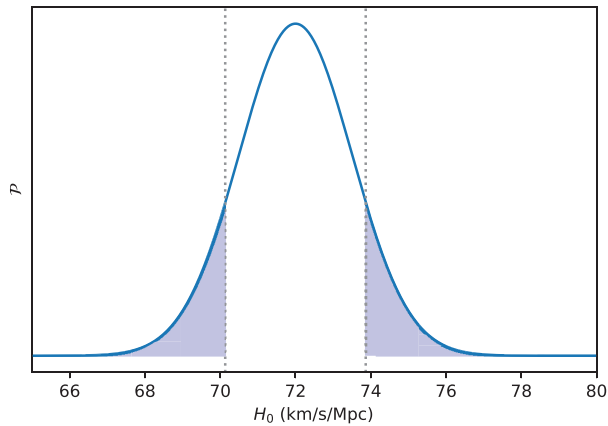


Figura 2: Exemplo de uma distribuição de densidade de probabilidade para o parâmetro de Hubble, H_0 . O máximo dessa distribuição está em 72.0 km/s/Mpc, o que seria o respectivo valor de melhor ajuste. A região branca (não hachurada) representa a região de 1σ de confiança, ou seja, uma probabilidade acumulada de 68.4% do valor real estar contido ali.

módulo de distância possui um menor erro o dificulta a restrição dos parâmetros cosmológicos realizada de forma manual pelo usuário neste software.

Para ilustrar o impacto que os parâmetros cosmológicos registram nas curvas teóricas e como isso interfere no valor do χ^2 , utilizamos o software SimECosmo (ver Anexo B) para variar o espaço de parâmetros e observar como as curvas teóricas do módulo de distância se posicionam em relação aos dados e, dessa forma, procurar o menor valor de χ^2 . Na Figura 3 apresentamos os gráficos com o melhor ajuste para ambos pacotes de dados. O SimECosmo mostra no próprio gráfico o valor dos parâmetros selecionados e um gráfico de barras com o valor de χ^2 sem que o usuário necessite entender de programação ou realizar o cálculo manualmente.

Nas Tabelas 2 e 3, mostramos os valores para os parâmetros que melhor ajustam os dados para os dois pacotes de dados utilizando uma análise bayesiana através do algoritmo das Cadeias de Markov (*Markov Chain Monte Carlo*). O valor do *best-fit* para os dados do Union 2.1 e do Pantheon Sample pode ser conferido utilizando o simulador. Os valores médios das grandezas foram obtidos seguindo a análise apresentada na discussão da Figura 2. Fizemos esta análise tanto para um universo espacialmente plano quanto para um universo possivelmente curvo. Para o modelo sem curvatura, obtemos o parâmetro de desaceleração hoje, através da equação (10), $q_0 = -0.58$ e $q_0 = -0.55$ para os dados do Union 2.1 e Pantheon, respectivamente. Quando não impomos *a priori* a condição de um Universo plano, temos $q_0 = -0.58$ para os dois pacotes. Em ambos os casos, a expansão é acelerada hoje.

A chave para extrairmos informações de melhor qualidade sobre os parâmetros cosmológicos, bem como desenvolver estratégias de comparação de modelos, é a utilização de dados de diferentes fenômenos, realizando

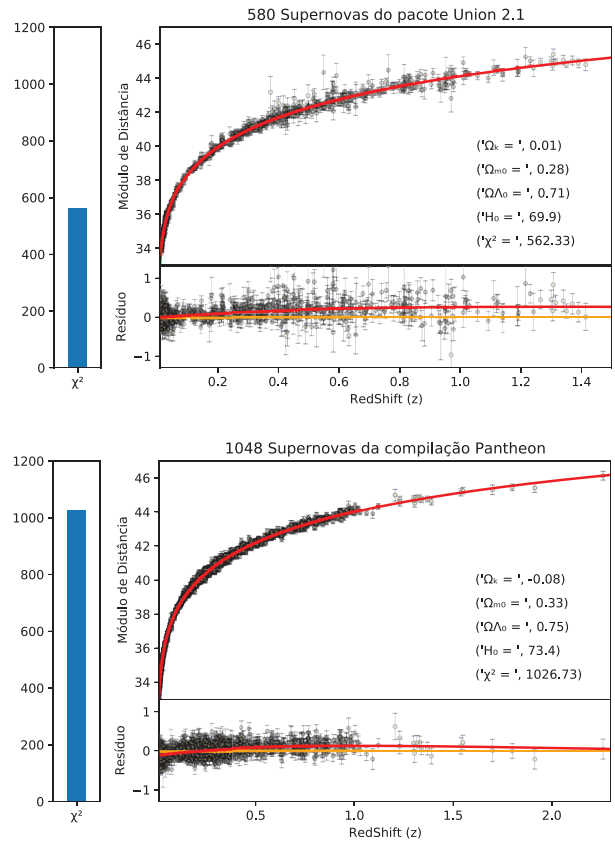


Figura 3: Os gráficos acima representam as curvas geradas pelo SimECosmo com os parâmetros de melhor ajuste descritos nas Tabelas 2 e 3.

análises estatísticas conjuntas [49]. Entre os dados que se apresentam, atualmente, com menor dispersão e maior controle de erros sistemáticos temos, além das supernovas do tipo Ia, dados de radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB) e dados provenientes do recenseamento 3-D de estruturas em larga escala, que nos permitem a construção do espectro de potência de massa, bem como a obtenção de dados de oscilações acústicas bariônicas (BAO). Podemos obter a densidade de probabilidade posterior tanto para um determinado pacote de dados de SN Ia, $\mathcal{P}_{SNe}(\theta|D_{SNe}, H)$, quanto para dados de CMB, $\mathcal{P}_{CMB}(\theta|D_{CMB}, H)$. A partir daí a densidade de probabilidade conjunta pode ser obtida pelo produto das anteriores, $\mathcal{P}_{SNe}(\theta|D_{SNe}, H) \times \mathcal{P}_{CMB}(\theta|D_{CMB}, H)$.

Como exemplo dos procedimentos apontados no parágrafo anterior, podemos tomar os resultados finais da colaboração Planck, divulgados em 2018. Nesse trabalho utilizaram-se informações em altos e baixos multi-polos, tanto de temperatura como de polarização, contanto com efeitos de lenteamento dos fótons da CMB, além de dados atuais de BAO e SN Ia. A partir daí obteve-se, para o modelo-padrão, $\Omega_m = 0.310 \pm 0.005$ e $H_0 = (67.72 \pm 0.40)$ km/s/Mpc [50]. Um exemplo de como os ajustes podem ser realizados para modelos cosmológicos pode ser encontrado em [51].

Tabela 2: Melhor ajuste e intervalos de credibilidade para os modelos cosmológicos estudados utilizando as Cadeias de Markov Monte Carlo para o pacote de dados Union 2.1. Duas análises foram realizadas, onde na primeira utilizamos como parâmetro livre Ω_{m0} de forma que $\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0}$ e na segunda utilizando como parâmetros livres Ω_{m0} e $\Omega_{\kappa0}$, com $\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\kappa0}$. O *best-fit* se refere ao conjunto de valores dos parâmetros para o qual se obtém a máxima verossimilhança, ou, equivalentemente nestas análises, χ^2_{min} . O valor médio (VM) e os intervalos de credibilidade de 68% e 95% estão apresentados nas linhas abaixo do *best-fit* para cada modelo e pacote de dados de Supernova. Desvios entre os valores de *best-fit* e VM sugerem distribuição de densidade de probabilidade assimétrica.

		Union 2.1	
		Universo Plano	Universo Curvo
<i>best-fit</i>		70.005	69.989
H_0 (km/s/Mpc)	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	70.00 ± 0.33	69.98 ± 0.43
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	70.00 ± 0.65	$69.98^{+0.82}_{-0.87}$
<i>best-fit</i>		0.277	0.2765
Ω_0	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	0.278 ± 0.019	0.274 ± 0.069
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$0.278^{+0.038}_{-0.036}$	$0.274^{+0.132}_{-0.139}$
<i>best-fit</i>		0	0.0049
$\Omega_{\kappa0}$	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	0	0.01 ± 0.18
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	0	$0.01^{+0.37}_{-0.34}$
<i>best-fit</i>		-0.5834	-0.5803
q_0	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	-0.583 ± 0.028	-0.578 ± 0.085
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$-0.583^{+0.058}_{-0.055}$	$-0.578^{+0.174}_{-0.162}$
<i>best-fit</i>		562.22	562.23
χ^2	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	564.13 ± 1.93	565.18 ± 2.40
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$564.13^{+4.12}_{-2.19}$	$565.18^{+5.00}_{-3.24}$

Tabela 3: Melhor ajuste e intervalos de credibilidade para os modelos cosmológicos estudados utilizando as Cadeias de Markov Monte Carlo para o pacote de dados Pantheon. Duas análises foram realizadas, onde na primeira utilizamos como parâmetro livre Ω_{m0} de forma que $\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0}$ e na segunda utilizando como parâmetros livres Ω_{m0} e $\Omega_{\kappa0}$, com $\Omega_{\Lambda0} = 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{\kappa0}$. O *best-fit* se refere ao conjunto de valores dos parâmetros para o qual se obtém a máxima verossimilhança, ou, equivalentemente nestas análises, χ^2_{min} . O valor médio (VM) e os intervalos de credibilidade de 68% e 95% estão apresentados nas linhas abaixo do *best-fit* para cada modelo e pacote de dados de Supernova. Desvios entre os valores de *best-fit* e VM sugerem distribuição de densidade de probabilidade assimétrica.

		Pantheon	
		Universo Plano	Universo Curvo
<i>best-fit</i>		73.296	73.394
H_0 (km/s/Mpc)	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	73.28 ± 0.36	73.37 ± 0.46
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$73.28^{+0.73}_{-0.70}$	$73.37^{+0.89}_{-0.91}$
<i>best-fit</i>		0.2977	0.3283
Ω_0	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	0.299 ± 0.022	0.319 ± 0.069
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$0.299^{+0.044}_{-0.043}$	$0.319^{+0.134}_{-0.138}$
<i>best-fit</i>		0	-0.077
$\Omega_{\kappa0}$	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	0	$-0.05^{+0.16}_{-0.18}$
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	0	$-0.05^{+0.36}_{-0.33}$
<i>best-fit</i>		-0.553	-0.5845
q_0	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	-0.551 ± 0.033	$-0.575^{+0.076}_{-0.087}$
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$-0.551^{+0.066}_{-0.064}$	$-0.575^{+0.170}_{-0.153}$
<i>best-fit</i>		1026.86	1026.72
χ^2	<i>VM</i> $\pm 1\sigma$	1028.89 ± 2.03	1029.69 ± 2.40
	<i>VM</i> $\pm 2\sigma$	$1028.89^{+4.17}_{-2.33}$	$1029.69^{+4.97}_{-3.29}$

De posse dos parâmetros que melhor ajustam os modelos, podemos obter um gráfico para a evolução do parâmetro de desaceleração (10), como pode ser visto na Figura 4. Para altos *redshifts* o Universo apresentava um parâmetro de desaceleração positivo. Portanto, no passado, quando o Universo era dominado pela matéria, a expansão era desacelerada. Além disso, vemos que o atual estado de expansão acelerada é uma característica relativamente recente: a transição ocorre em $z \approx 0.7$. Calculando o parâmetro de desaceleração para o infinito no futuro, temos $q(z = -1) = -1$, indicando que a expansão será acelerada indefinidamente.

6. Considerações Finais

Uma explicação para a expansão acelerada do Universo ainda está para ser formulada e constitui um dos grandes desafios da física para o século XXI. A Energia Escura está associada a esse fenômeno. Conhecemos seus efeitos, contudo não sabemos ainda do que é feita ou se é o indicativo da necessidade de uma nova teoria gravitacional. Os modelos estudados neste trabalho assumem que a expansão acelerada é causada pela presença de uma constante cosmológica Λ . Contudo, se essa constante é

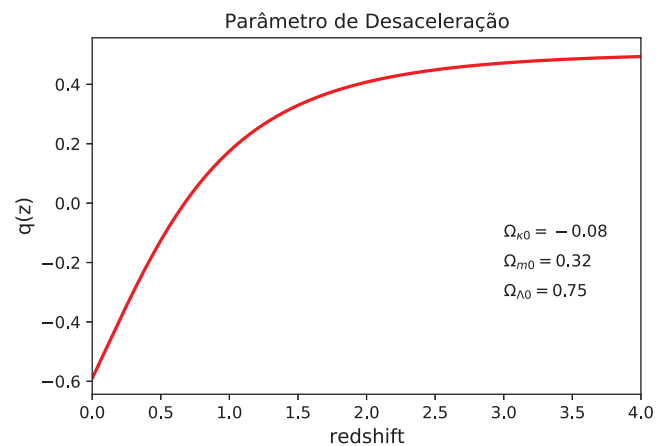


Figura 4: Gráfico de $q(z)$ gerado pelo SimECosmo com o melhor ajuste para o modelo com curvatura para os dados do Pantheon.

de fato uma nova constante na natureza ou se pode ser interpretada como a energia do vácuo ainda é um problema em aberto [52]. Além disso, outras explicações para a expansão acelerada são encontradas na literatura; alguns exemplos desses modelos alternativos de Energia Escura podem ser consultados em [53].

O SimECosmo foi desenvolvido com a utilização das equações aqui explicitadas; a partir desse conteúdo encorajamos o leitor a reproduzir os resultados do simulador, apresentados nas Tabelas 2 e 3, de acordo com o seu próprio código computacional. Para uma análise mais detalhada, recomendamos a leitura do Anexo A, no qual deduzimos as equações, e do Anexo B, no qual indicamos o endereço para obter o software e instruções de como utilizá-lo.

Com o presente artigo, em conjunto com o SimECosmo, esperamos atrair o interesse de novos estudantes, professores e pesquisadores, que por sua vez acrescentarão novos conteúdos a este campo de pesquisa, cujo estado da arte hoje já cataloga novos experimentos e observáveis de SN Ia que demandarão respostas para as questões ainda em aberto na cosmologia, em especial, o que é a Energia Escura. Podemos destacar nesse setor as pesquisas do consórcio hispano-brasileiro J-PAS, acrônimo para Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey [54], o LSST, Large Synoptic Survey Telescope [55], além do rádio telescópio BINGO, Baryon Acoustic Oscillations in Neutral Gas Observations [56].

Versões futuras do programa pretendem: incluir outras compilações de Supernovas; implementar novos observáveis astrofísicos; permitir o cálculo χ^2 e \mathcal{L} ; obter a projeção dos parâmetros fotométricos para pacotes mais recentes de Supernovas. Com esses dispositivos o usuário vislumbrará como análises combinadas restringem com maior precisão parâmetros cosmológicos. No final, pretendemos disponibilizar publicamente o código fonte deste trabalho em <https://github.com/barau-na-lo>.

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer especialmente ao design gráfico Rodrigo Santos pela confecção da arte da logo do software; à Verônica Andrade e Nadine Correia por testarem e criticarem as funcionalidade do programa durante seu desenvolvimento; à Cláudia Vilega Rodrigues e Carlos Alexandre Wuensche por significativas contribuições ao software; e a Paulo Roberto Pereira Raymundo pela revisão do texto.

Material Suplementar

A. Dedução das relações utilizadas em distâncias cosmológicas

A.1. Dedução do módulo de distância

Da equação (17) sabemos que

$$\mu = -2,5 \log \left(\frac{f}{f_{10}} \right), \quad (34)$$

sendo que o fluxo a uma distância d em *parsecs* é dado por $f = \frac{L}{4\pi d^2}$. Temos então

$$\begin{aligned} \mu &= -2,5 \log \left(\frac{\frac{L}{4\pi d^2}}{\frac{L}{4\pi 10^2}} \right) = -2,5 \log \left(\frac{10}{d} \right)^2 \\ &= -5 \log \left(\frac{10}{d} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

Utilizando a propriedade de subtração de logaritmos podemos definir essa distância d em *parsecs* como distância de luminosidade, representando por d_L . Obtendo então

$$\mu = 5 \log \left(\frac{d_L}{1pc} \right) - 5. \quad (36)$$

Como $1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc}$ então $1 \text{ pc} = 10^{-6} \text{ Mpc}$, fazendo essa substituição e utilizando algumas propriedades de logaritmo encontramos o módulo de distância μ em função da distância de luminosidade calculada em *Megaparsecs* como

$$\mu = 5 \log \left(\frac{d_L}{1Mpc} \right) + 25. \quad (37)$$

A.2. Dedução da coordenada radial comóvel r_κ

Definimos a distância própria d_p entre dois pontos como o comprimento da geodésica espacial entre eles quando o fator de escala é fixado num valor $a(t)$. Com isso, temos que $d\theta = d\phi = dt = 0$. Lembrando que o intervalo ds^2 é tipo-espaço logo, menor que zero (consequência da assinatura escolhida), então, a distância própria entre o observador e a galáxia é definida como

$$d_p(t) = \int \sqrt{-ds^2} = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = a(t) d_c, \quad (38)$$

em que a distância comóvel está relacionada com a coordenada r ,

$$d_c = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh^{-1} \sqrt{-\kappa} r. \quad (39)$$

Isolando a coordenada radial comóvel r_κ , obtemos que

$$r_\kappa = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh(d_c \sqrt{-\kappa}), \quad (40)$$

onde o índice κ aparece somente para representar a dependência da coordenada radial comóvel com a curvatura.

A.3. Distância luminosidade em cada curvatura

Utilizando a fórmula de Euler, a definição de seno hiperbólico e sabendo que $\sqrt{-1} = i$, podemos mostrar a identidade

$$\sinh(ix) = i \operatorname{sen}(x). \quad (41)$$

Através da definição de coordenada radial comóvel r_κ e levando em conta que $d_c(t_0) = \frac{d_p(t_0)}{a_0}$, podemos escrever

$$r_\kappa(t_0) = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh\left(\frac{d_p(t_0)\sqrt{-\kappa}}{a_0}\right). \quad (42)$$

Como a distância própria é dada pela equação,

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (43)$$

podemos escrever o r_κ como

$$r_\kappa(t_0) = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh\left(\frac{c\sqrt{-\kappa}}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right); \quad (44)$$

através da definição de área própria e fluxo escrevemos a equação (23)

$$d_L(z) = a_0 r_\kappa(z)(1+z), \quad (45)$$

na qual substituiremos $r_\kappa(t_0)$, obtendo assim

$$d_L(z) = \frac{a_0(1+z)}{\sqrt{-\kappa}} \sinh\left(\frac{c\sqrt{-\kappa}}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right). \quad (46)$$

Note que para $\kappa \rightarrow +1$ a distância luminosidade torna-se

$$d_L(z) = \frac{a_0(1+z)}{i} \sinh\left(i \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right), \quad (47)$$

que através da identidade (41) é equivalente a

$$d_L(z) = a_0(1+z) \operatorname{sen}\left(\frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right), \quad (48)$$

agora, devemos impor o limite $\kappa \rightarrow 0$ na equação (46). Para simplificar colocaremos o limite como $\sqrt{-\kappa} \rightarrow 0$ obtendo

$$d_L(z) = a_0(1+z) \lim_{\sqrt{-\kappa} \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh\left(\frac{c\sqrt{-\kappa}}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right) \right]. \quad (49)$$

Aplicando a regra de L'Hopital obtemos

$$d_L(z) = a_0(1+z) \lim_{\sqrt{-\kappa} \rightarrow 0} \left[\cosh\left(\frac{c\sqrt{-\kappa}}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right) \cdot \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right]; \quad (50)$$

através da definição de cosseno hiperbólico obtemos que $\cosh(0) = 1$, então

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (51)$$

e, por último, para $\kappa \rightarrow -1$ a equação (46) é escrita como

$$d_L(z) = a_0(1+z) \operatorname{senh}\left(\frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}\right). \quad (52)$$

Através da equação de Friedmann (4) sabemos que $\Omega_{\kappa 0} = \frac{-\kappa c^2}{a_0^2 H_0^2}$. Com esta definição podemos escrever a distância luminosidade para $\kappa = +1, 0$ ou -1 como [35]

$$d_L(z) = \begin{cases} \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{-\Omega_{\kappa 0}}} \operatorname{sen} & \text{para } \kappa = +1 \\ \quad \times \left(H_0 \sqrt{-\Omega_{\kappa 0}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right) & \\ c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} & \text{para } \kappa = 0 \\ \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{\Omega_{\kappa 0}}} \operatorname{senh} & \text{para } \kappa = -1. \\ \quad \times \left(H_0 \sqrt{\Omega_{\kappa 0}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right) & \end{cases} \quad (53)$$

B. Instruções do software SimECosmo

O programa foi desenvolvido na linguagem Python 3.8 utilizando a biblioteca de interface gráfica GUI (*Graphic User Interface*) `tkinter`, com base na física apresentada neste trabalho. Neste software o usuário pode salvar a imagem com o melhor ajuste encontrado. Este recurso foi adicionado para fins didáticos/avaliativos caso o software seja utilizado em sala ou cursos de cosmologia, por exemplo. Para uma maior compreensão, decidimos explicitar o valor χ^2 ao invés de \mathcal{L} , expresso na equação (32). Uma vez que esta equação descreve o valor da diferença entre teoria e observação.

A versão aqui apresentada explicita o cálculo do módulo de distância em função do *redshift* para os parâmetros selecionados dentro de um certo modelo e confronta a previsão teórica do módulo de distância com os dados observacionais de supernovas do Union 2.1 Compilation e do Pantheon Sample. O código desse programa será futuramente compartilhado em <https://github.com/barauana-lo> e pedimos que fiquem atentos a futuras versões. Este programa pode ser baixado gratuitamente em sourceforge.net/projects/simecosmo/ e um breve tutorial apresentado no SNEF (Simpósio Nacional de Ensino de Física) pode ser acessado em <https://youtu.be/NmpRtHLYZkA>.

Referências

- [1] A. Einstein, em: *The principle of Relativity*, editado por H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski e H. Weyl (Dover Publications, 2013).
- [2] C. O’Raifeartaigh, M. O’Keeffe, W. Nahm e S. Mitton, *The European Physical Journal H*. **42**, 431 (2017).
- [3] I. Waga, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **27**, 157 (2005).
- [4] J.A.S. Lima e R.C. Santos, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **40**, e1313 (2018).
- [5] G. Lemaître, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* **47**, 49 (1927).
- [6] G. Lemaître, *General Relativity and Gravitation* **45**, 1635 (2013).
- [7] G. Lemaître, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **91**, 483 (1931).

- [8] J. Luminet, *General Relativity and Gravitation* **45**, 1619 (2013).
- [9] A. Friedman, *General Relativity and Gravitation* **31**, 1991 (1999).
- [10] H. Velten e W. Zimdahl, *Cadernos de Astronomia* **3**, 151 (2022).
- [11] A. Friedmann, *General Relativity and Gravitation* **31**, 2001 (1999).
- [12] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**, 168 (1929).
- [13] A. Bagdonas, J. Zanetic e I. Gurgel, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **39**, e2602 (2017).
- [14] V.R.P. Rocha e A.C. Tort, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **41**, e20180281 (2019).
- [15] H. Bondi e T. Gold, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **108**, 252 (1948).
- [16] F. Hoyle, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **108**, 372 (1948).
- [17] G. Gamow, *Vistas in Astronomy* **2**, 1726 (1956).
- [18] B. Jones, *Precision Cosmology: The First Half Million Years* (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).
- [19] J.E. Gunn e B.M. Tinsley, *Nature* **257**, 454 (1975).
- [20] G. Efstathiou, W.J. Sutherland e S.J. Maddox, *Nature* **348**, 705 (1990).
- [21] A.G. Riess, A.V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P.M. Garnavich, R.L. Gilliland, C.J. Hogan, S. Jha, R.P. Kirshner et al., *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [22] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D.E. Groom et al., *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).
- [23] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L.F. Barrientos, J. Botyanszki, M. Brodwin, N. Connolly et al., *The Astrophysical Journal* **746**, 85 (2012).
- [24] D.M. Scolnic, D.O. Jones, A. Rest, Y.C. Pan, R. Chornock, R.J. Foley, M.E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A.G. Riess et al., *The Astrophysical Journal* **859**, 101 (2018).
- [25] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016).
- [26] R. Lambourne, *Relativity, Gravitation and Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [27] M. Dalarsson e N. Dalarsson, *Tensors, Relativity and Cosmology* (Elsevier Academic Press, Amesterdã, 2005).
- [28] H.V. Fagundes, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **24**, 247 (2002).
- [29] D. Soares, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **35**, 1 (2013).
- [30] V.S. Aderaldo e V.P. Gonçalves, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **42**, e20200050 (2020).
- [31] D. Valcin, R. Jimenez, L. Verde, J.L. Bernal e B.D. Wandelt, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2021**, 017 (2021).
- [32] S.O. Kepler e M.F.O. Saraiva, *Astronomia & Astrofísica* (Livraria da Física, São Paulo, 2017).
- [33] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- [34] G.F.R. Ellis, R. Maartens e A.H. MacCallum, *Relativistic Cosmology*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2012).
- [35] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- [36] A. Goobar e B. Leibundgut, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **61**, 251 (2011).
- [37] J.E. Horvath, *Fundamentos da evolução estelar, supernovas e objetos compactos* (Livraria da Física, São Paulo, 2011).
- [38] J.E. Horvath, *As estrelas na sala de aula: uma abordagem para o ensino da Astronomia Estelar* (Livraria da Física, São Paulo, 2019).
- [39] C. Cercignani e G.M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications* (Birkhäuser Basel, Basel, 2002).
- [40] R.P. Kirshner, em: *Dark Energy*, editado por P. Ruiz-Lapuente (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).
- [41] R.R.R. Reis e B.B. Siffert, *Cadernos de Astronomia* **3**, 21 (2022).
- [42] D. Parkinson e A.R. Liddle, *Statistical Analysis and Data Mining* **6**, 3 (2013).
- [43] T.D. Saini, J. Weller e S.L. Bridle, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **348**, 603 (2004).
- [44] R. Trotta, *Contemporary Physics* **49**, 71 (2008).
- [45] M.P. Hobson, S.L. Bridle e O. Lahav, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **335**, 377 (2002).
- [46] R. Andrae, *ArXiv:1009.2755* (2010).
- [47] G. Rocha, R. Trotta, C.J.A.P. Martins, A. Melchiorri, P.P. Avelino, R. Bean e P.T.P. Viana, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **352**, 20 (2004).
- [48] L. Amendola, D. Polarski e S. Tsujikawa, *Physical Review Letters* **98**, 131302 (2007).
- [49] C. Pigozzo, *Testes de Concordância em Modelos Cosmológicos com Interação no Setor Escuro*. Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador (2010).
- [50] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A.J. Banday, R.B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak et al., *Astron. Astrophys* **641**, A6 (2020).
- [51] G.P.S. Neto, *Rev. Bras. Ens. Fis.*, **40**, e2318 (2018).
- [52] S.M. Carroll, *Living Reviews in Relativity* **4**, 1 (2001).
- [53] J.A.S. Lima, *Brazilian Journal of Physics* **34**, 194 (2004).
- [54] N. Benitez, R. Dupke, M. Moles, L. Sodre, J. Cenarro, A. Marin-Franch, K. Taylor, D. Cristobal, A. Fernandez-Soto, C. Mendes de Oliveira et al., *arXiv:1403.5237* (2014).
- [55] Z. Ivezic, S.M. Kahn, J.A. Tyson, B. Abel, E. Acosta, R. Allsman, D. Alonso, Y. AlSayyad, S.F. Anderson, J. Andrew et al., *The Astrophysical Journal* **873**, 111 (2019).
- [56] E. Abdalla, E.G.M. Ferreira, R.G. Landim, A.A. Costa, K.S.F. Fornazier, F.B. Abdalla, L. Barosi, F.A. Brito, A.R. Queiroz, T. Villela et al., *arXiv:2107.01633* (2021).